Siyavula textbooks: Wiskunde (Graad 11)

Collection Editor:
Free High School Science Texts Project

Siyavula textbooks: Wiskunde (Graad 11)

Collection Editor:

Free High School Science Texts Project

Authors:

Free High School Science Texts Project
Wiehan Agenbag
Mr S.N.Carollisson
Carl Scheffler
Liezel du Toit

Online:

< http://siyavula.cnx.org/content/col11339/1.4/ >

C O N N E X I O N S

Rice University, Houston, Texas

Collection structure revised: September 20, 2011
PDF generated: September 20, 2011
For copyright and attribution information for the modules contained in this collection, see p. 143.

Table of Contents

Exponente[1]

Eksponente - Graad 11

Inleiding

In Graad 11 het ons eksponensiële getalle bestudeer en ons het die ses wette geleer wat bewerking met eksponensiële getalle baie makliker gemaak het. Daar is een wet wat ons nie in Graad 11 gedoen het nie. Dit sal ons hier beskryf.

Wette van Eksponente

In Graad 11 het ons net met indekse gewerk wat in heelgetalle was. Wat gebeur is die indeks nie 'n heelgetal is nie, maar 'n rasionele getal? Dit lei ons na die finale wet van eksponente,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{1}$$

Eksponensiële Wet 7: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ons sê dat x is 'n $n$de wortel van b as $x^n = b$ en ons kan skryf $x = \sqrt[n]{b}$. n^{de} wortels geskryf met die radikale simbool, $\sqrt{\ }$, word verwys as wortelvorme. Byvoorbeeld, $(-1)^4 = 1$, so -1 is 'n 4de wortel van 1. Waneer ons wet 6 gebruik sien ons dat,

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\times n} = a^m \tag{2}$$

dus $a^{\frac{m}{n}}$ moet 'n $n$de wortel van a^m wees. Ons kan dus sê,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{3}$$

Byvoorbeeld,

$$2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} \tag{4}$$

'n Getal mag nie altyd 'n rasionele $n$de wortel hê nie. Byvoorbeeld, as $n = 2$ en $a = -1$, dan is daar geen rasionele getal so dat $x^2 = -1$ omdat $x^2 \geq 0$ vir alle rasionele getalle van x.

[1]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m38256/1.1/>.

Komplekse Getalle

Daar is getalle wat probleme kan oplos soos $x^2 = -1$, maar dit is buite die omvang van hierdie boek. Hulle word genoem *komplekse getalle*.

Dit is ook moentlik vir meer as een $n$de wortel vir 'n gegewe getal om te bestaan. Byvoorbeeld, $(-2)^2 = 4$ en $2^2 = 4$, so beide -2 en 2 is 2de (vierkants) wortels van 4. Gewoonlik, as daar meer as een wortel is, dan kies ons die positiewe reële getal en ons gaan aan.

Exercise 1: Rasionele Eksponente
Vereenvoudig sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

$$\left(\frac{5}{4^{-1} - 9^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Exercise 2: Meer Rasionele Eksponente
Vereenvoudig:

$$\left(16x^4\right)^{\frac{3}{4}} \tag{6}$$

Toepassing van Wette

Gebruik al die wette om:

1. Vereenvoudig:

(a) $\left(x^0\right) + 5x^0 - (0,25)^{-0,5} + 8^{\frac{2}{3}}$	(b) $s^{\frac{1}{2}} \div s^{\frac{1}{3}}$
(c) $\frac{12m^{\frac{7}{9}}}{8m^{-\frac{11}{9}}}$	(d) $\left(64m^6\right)^{\frac{2}{3}}$

Table 1

2. Her-skryf die volgende uitdrukking as 'n krag van x:

$$x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} \tag{7}$$

Eksponensiële in die Werklike Wêreld

In Graad 10 Finansies, het julle eksponensiële gebruik om verskillende tipe rente te bereken. Byvoorbeeld op 'n spaarrekening of op 'n lening en saamgestelde groei.

Exercise 3: Eksponensiële in die Werklike Wêreld
'n Spesifike tipe bakterieë het 'n baie hoë eksponensiële groei koers teen 80% elke uur. As daar 10 bakterieë is, bepaal hoeveel daar sal wees na 5 uur, 'n dag en na 1 week?

Exercise 4: Meer Eksponensiële in die Werklike Wêreld
'n Spesifike soort van uiters skaars diep water vis het 'n baie lang leeftyd en het slede kinders. As daar 'n totaal van 821 van hierdie tipe vis is en hulle groei koers is 2% per mannd, hoeveel sal daar wees by die helfte van 'n gegewe jaar? Wat sal de bevolking wees in 10 jaar en in 'n 100 jaar wees?

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Vereenvoudig so ver as moontlik:
   a. $8^{-\frac{2}{3}}$
   b. $\sqrt{16} + 8^{-\frac{2}{3}}$
2. Vereenvoudig:

(a) $\left(x^3\right)^{\frac{4}{3}}$	(b) $\left(s^2\right)^{\frac{1}{2}}$
(c) $\left(m^5\right)^{\frac{5}{3}}$	(d) $\left(-m^2\right)^{\frac{4}{3}}$
(e) $-\left(m^2\right)^{\frac{4}{3}}$	(f) $\left(3y^{\frac{4}{3}}\right)^4$

Table 2

3. Vereenvoudig so veel as wat jy kan:
$$\frac{3a^{-2}b^{15}c^{-5}}{\left(a^{-4}b^3c\right)^{\frac{-5}{2}}} \tag{8}$$
4. Vereenvoudig so veel as wat jy kan:
$$\left(9a^6b^4\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$
5. Vereenvoudig so veel as wat jy kan:
$$\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{4}}\right)^{16} \tag{10}$$
6. Vereenvoudig:
$$x^3\sqrt{x} \tag{11}$$
7. Vereenvoudig:
$$\sqrt[3]{x^4b^5} \tag{12}$$
8. Herskryf die volgende uitdrukking as 'n krag van$x$:
$$\frac{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}{\sqrt[3]{x}} \tag{13}$$

Wortelvorme[2]

Berekening van wortelvorme

Daar is verskeie reëls wat dit makliker maak om met wortelvorme te werk. Ons sal elkeen lys en dan in diepte verduidelik waar die reël vandaan kom.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\ \sqrt[n]{a^m} &= a^{\frac{m}{n}} \end{aligned} \qquad (1)$$

Wortelwet 1: $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Dit is gewoonlik nuttig om 'n wortelvorm in eksponensiaalnotasie te beskou, aangesien dit ons toelaat om die eksponentwette, wat ons in Graad 10 geleer het, te gebruik. In eksponensiaalnotasie, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ en $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$. Vervolgens,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} &= a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} \\ &= (ab)^{\frac{1}{n}} \\ &= \sqrt[n]{ab} \end{aligned} \qquad (2)$$

'n Paar voorbeelde wat hierdie wet gebruik:

1. $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{64} = 4$
2. $\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{64} = 8$
3. $\sqrt{a^2b^3} \times \sqrt{b^5c^4} = \sqrt{a^2b^8c^4} = ab^4c^2$

Wortelwet 2: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Indien ons na $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ in eksponensieelnotasie kyk en die eksponentwette toepas, dan is

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \end{aligned} \qquad (3)$$

'n Paar voorbeelde wat hierdie wet gebruik:

1. $\sqrt{12} \div \sqrt{3} = \sqrt{4} = 2$

[2] This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m38237/1.2/>.

2. $\sqrt[3]{24} \div \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8} = 2$
3. $\sqrt{a^2b^{13}} \div \sqrt{b^5} = \sqrt{a^2b^8} = ab^4$

Wortelwet 3: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Indien ons na $\sqrt[n]{a^m}$ in eksponensiaalnotasie kyk en die eksponentwette toepas, dan is

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^m} &= (a^m)^{\frac{1}{n}} \\ &= a^{\frac{m}{n}} \end{aligned} \tag{4}$$

Byvoorbeeld

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{2^3} &= 2^{\frac{3}{6}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned} \tag{5}$$

Gelyksoortige en ongelyksoortige wortelvorme

Twee wortelvorme $\sqrt[m]{a}$ en $\sqrt[n]{b}$ word *gelyksoortige wortelvorme* genoem indien $m = n$, andersins word hulle *ongelyksoortige wortelvorme* genoem. Byvoorbeeld, $\sqrt{2}$ en $\sqrt{3}$ is gelyksoortig, terwyl $\sqrt{2}$ en $\sqrt[3]{2}$ ongelyksoortig is. Dit is belangrik om op te let dat die wortelwette wat ons pas geleer het almal gelyksoortige wortelvorme is.

Indien ons die wortelwette op ongelyksoortige wortelvorme wil toepas, moet ons hulle eers omskakel na gelyksoortige wortelvorme. Om hierdie reg te kry, gebruik ons die formule

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[bn]{a^{bm}} \tag{6}$$

om die ongelyksoortige wortelvorme oor te skryf sodat bn dieselfde is vir alle wortelvorme.

Exercise 5: Gelyksoortige en ongelyksoortige wortelvorme
Vereenvoudig die gelyksoortige wortelvorme so ver moontlik, en wys alle stappe: $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[5]{5}$

Eenvoudigste wortelvorm

Wanneer daar gewerk word met wortelvorme, word antwoorde meestal in die eenvoudigste wortelvorm gegee. Byvoorbeeld

$$\begin{aligned} \sqrt{50} &= \sqrt{25 \times 2} \\ &= \sqrt{25} \times \sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned} \tag{7}$$

$5\sqrt{2}$ is die eenvoudigste wortelvorm van $\sqrt{50}$.

Exercise 6: Eenvoudigste wortelvorm
Herskryf $\sqrt{18}$ in die eenvoudigste wortelvorm:

Exercise 7: Eenvoudigste wortelvorm
Vereenvoudig: $\sqrt{147} + \sqrt{108}$

Rasionaliserende delers

Dit is nuttig om met breuke te werk wat rasionale delers het eerder as wortelvormige delers. Dit is moontlik om enige breuk wat 'n wortelvorm as deler het oor te skryf as 'n breuk met rasionale deleter. Ons sal nou sien hoe dit gedoen kan word.

Enige uitdrukking van die vorm $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (waar a and b rasionaal is) kan verander word in 'n rasionale getal deur dit te vermenigvuldig met $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (soortgelyk kan $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ gerasionaliseer word deur dit te vermenigvuldig met $\sqrt{a}+\sqrt{b}$). Dit is omdat

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b \tag{8}$$

wat rasionaal is (aangesien a en b rasionaal is).

Indien ons 'n breuk het met 'n deler wat soos $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ lyk, kan ons bloot bo en onder vermenigvuldig met $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ en kry sodoende 'n rasionale deler.

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\ &= \frac{c\sqrt{a}-c\sqrt{b}}{a-b} \end{aligned} \tag{9}$$

of soortgelyk

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\ &= \frac{c\sqrt{a}+c\sqrt{b}}{a-b} \end{aligned} \tag{10}$$

Exercise 8: Rasionalisering van die deler
Rasionaliseer die deler: $\frac{5x-16}{\sqrt{x}}$

Exercise 9: Rasionalisering van die deler
Rasionaliseer die volgende: $\frac{5x-16}{\sqrt{y}-10}$

Exercise 10: Rasionaliseer die deler
Vereenvoudig die volgende: $\frac{y-25}{\sqrt{y}+5}$

Oefeninge

1. Brei uit:

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right) \tag{11}$$

2. Rasionaliseer die deler:

$$\frac{10}{\sqrt{x}-\frac{1}{x}} \tag{12}$$

3. Skryf as 'n enkele breuk:

$$\frac{3}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x} \tag{13}$$

4. Skryf in die eenvoudigste wortelvorm:

(a) $\sqrt{72}$	(b) $\sqrt{45}+\sqrt{80}$
(c) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}}$	(d) $\frac{\sqrt{18}\div\sqrt{72}}{\sqrt{8}}$
(e) $\frac{4}{\left(\sqrt{8}\div\sqrt{2}\right)}$	(f) $\frac{16}{\left(\sqrt{20}\div\sqrt{12}\right)}$

Table 1

5. Brei uit en vereenvoudig:
$$\left(2+\sqrt{2}\right)^2 \tag{14}$$
6. Brei uit en vereenvoudig:
$$\left(2+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{8}\right) \tag{15}$$
7. Brei uit en vereenvoudig:
$$\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{8}+\sqrt{3}\right) \tag{16}$$
8. Rasionaliseer die deler:
$$\frac{y-4}{\sqrt{y}-2} \tag{17}$$
9. Rasionaliseer die deler:
$$\frac{2x-20}{\sqrt{y}-\sqrt{10}} \tag{18}$$
10. Bewys, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, dat:
$$\sqrt{\frac{8}{3}}+5\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{13}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \tag{19}$$
11. Vereenvoudig, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:
$$\frac{\sqrt{98}-\sqrt{8}}{\sqrt{50}} \tag{20}$$
12. Vereenvoudig, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:
$$\sqrt{5}\left(\sqrt{45}+2\sqrt{80}\right) \tag{21}$$
13. Skryf die volgende met 'n rasionale deler:
$$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} \tag{22}$$
14. Vereenvoudig:
$$\sqrt{98x^6}+\sqrt{128x^6} \tag{23}$$
15. Evalueer, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar: $\left(2-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(2+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
16. Die gebruik van 'n sakrekenaar word toegelaat in hierdie vraag. Vereenvoudig volledig en wys alle stappe: $3^{-\frac{1}{2}}\left[\sqrt{12}+\sqrt[3]{(3\sqrt{3})}\right]$
17. Vul in die ontbrekende wortelvormgetal wat die volgende vergelyking waar sal maak: $-3\sqrt{6}\times-2\sqrt{24}=-\sqrt{18}\times$ ....

Foutgrense[3]

Foutgrense - Graad 11

Ons het gesien dat getalle rasionaal of irrasionaal kan wees en ons het gesien hoe om getalle af te rond. In 'n berekening wat meer as een stap het, is dit beter om die afronding in die heel laaste stap te doen.

By voorbeeld, as jy gevra word om $3\sqrt{3}+\sqrt{12}$ te skryf as 'n desimale getal afgerond tot twee desimale plekke, is daar twee maniere om dit te doen.

Metode 1

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3}+\sqrt{12} &= 3\sqrt{3}+\sqrt{4\cdot 3} \\ &= 3\sqrt{3}+2\sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{3} \\ &= 5\times 1,732050808... \\ &= 8,660254038... \\ &= 8,66 \end{aligned} \tag{1}$$

Metode 2

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3}+\sqrt{12} &= 3\times 1,73+3,46 \\ &= 5,19+3,46 \\ &= 8,65 \end{aligned} \tag{2}$$

In hierdie voorbeeld sien ons dat Metode 1 die antwoord gee as 8,66 terwyl Metode 2 die antwoord gee as 8,65. Die antwoord van Metode 1 is meer akkuraat want die uitdrukking is so ver as moontlik vereenvoudig voordat die antwoord afgerond is.

In die algemeen is dit beter om 'n uitdrukking sover as moontlik te vereenvoduig voordat jy jou sakrekenaar gebruik om die antwoord in desimale vorm te gee.

TIP: Vereenvoudiging en Akkuraatheid

Dit is nodig om alle uitdrukkings sover as moontlik te vereenvoudig voordat antwoorde afgerond word. Dit het 'n invloed op die akkuraatheid van jou antwoord.

Exercise 11: Vereenvoudiging en Akkuraatheid
Bereken $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}$. Gee die antwoord korrek tot drie desimale plekke.

Exercise 12: Vereenvoudiging en Akkuraatheid 2
Bereken $\sqrt{x+1}+\frac{1}{3}\sqrt{(2x+2)-(x+1)}$ as $x=3,6$. Gee die antwoord korrek tot twee desimale plekke.

[3]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m38241/1.2/>.

Beduidende syfers

In enige getal is elke syfer wat nie nul is nie, 'n beduidende syfer. Nulle word slegs getel indien hulle tussen twee nie-nul syfers is of aan die einde van die desimale gedeelte van die getal. By voorbeeld, die getal 2000 het 1 beduidende syfer (die 2), maar $2000,0$ het 5 beduidende syfers. Skatting van 'n getal word gedoen deur die beduidende syfers uit jou getal (begin by syfer aan regterkant) te verwyder totdat jy die verlangde aantal beduidende syfers het. Rond af soos jy voortgaan. By voorbeeld $6,827$ het 4 beduidende syfers, maar as jy dit wil skryf as 'n getal met 3 beduidende syfers, beteken dit dat jy die 7 moet verwyder en oprond, so dit word $6,83$. Dit is belangrik om te weet wanneer om 'n getal te benader en wanneer nie. Dit is gewoonlik goeie praktyk om slegs getalle te benader wanneer dit absoluut noodsaaklik is, en liewer simbole te gebruik om sekere irrasionale getalle voor te stel (byvoorbeeld π). Benadering gebeur eers aan die einde van die berekening. As dit nodig is om 'n getal in die middel van 'n berekening te benader, is dit dikwels goed genoeg om te benader tot 'n aantal desimale plekke.

Kwadratiese rye[4]

Inleiding

In graad 10 het jy geleer van rekenkundige rye, waar die verskil tussen opeenvolgende terme konstant was. In hierdie hoofstuk leer ons van kwadratiese rye.

Wat is 'n *kwadratiese ry*?

Definition 1: Kwadratiese ry
'n Kwadratiese ry is 'n ry waar die tweede verskille tussen opeenvolgende terme met dieselfde hoeveelheid verskil. Dit word 'n gemene tweede verskil genoem.

Byvoorbeeld

$$1;\ 2;\ 4;\ 7;\ 11;\ ... \tag{1}$$

is 'n kwadratiese ry. Kom ons stel vas hoekom ...

Indien ons die verskil tussen opeenvolgende terme neem, is

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 2 - 1 &= 1 \\ a_3 - a_2 &= 4 - 2 &= 2 \\ a_4 - a_3 &= 7 - 4 &= 3 \\ a_5 - a_4 &= 11 - 7 &= 4 \end{aligned} \tag{2}$$

dan werk ons die *tweede verskille* uit, wat bloot gekry word deur die verskille tussen opeenvolgende verskille $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ ...\}$ te neem:

$$\begin{aligned} 2 - 1 &= 1 \\ 3 - 2 &= 1 \\ 4 - 3 &= 1 \\ &... \end{aligned} \tag{3}$$

Ons sien dan dat die tweede verskille gelyk is aan "1". Dus is (1) 'n *kwadratiese ry*.

Let op dat die verskille tussen opeenvolgende terme (met ander woorde, die eerste verskille) van 'n kwadratiese ry, 'n ry vorm waar daar 'n konstante verskil is tussen opeenvolgende terme. In die voorbeeld hier bo, het die ry $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ ...\}$, wat gevorm is die die verskille tussen opeenvolgende terme van (1) te neem, 'n linêere formule van die vorm $ax + b$.

[4] This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m38240/1.2/>.

Kwadratiese rye

Die volgende is ook voorbeelde van kwadratiese rye:

$$\begin{aligned} 3;\ 6;\ 10;\ 15;\ 21;\ ... \\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ 36;\ ... \\ 7;\ 17;\ 31;\ 49;\ 71;\ ... \\ 2;\ 10;\ 26;\ 50;\ 82;\ ... \\ 31;\ 30;\ 27;\ 22;\ 15;\ ... \end{aligned} \quad (4)$$

Kan jy die gemene tweede verskille vir elk van die voorbeelde hier bo bereken?

Exercise 13: Kwadratiese ry

Skryf neer die volgende twee terme en vind 'n formule vir die n^{de} term in die ry $5, 12, 23, 38, ..., ...,$

Algemene geval

Indien die ry kwadraties is, moet die n^{de} term $T_n = an^2 + bn + c$ wees

TERME	$a+b+c$		$4a+2b+c$		$9a+3b+c$	
1ste verskil		$3a+b$		$5a+b$		$7a+b$
2de verskil			$2a$		$2a$	

Table 1

In elke geval is die tweede verskil $2a$. Hierdie feit kan gebruik word om a te vind, dan b en dan c.

Exercise 14: Kwadratiese ry

Die volgende ry is kwadraties: $8, 22, 42, 68, ...$ Vind die formule.

Bepaling van die n^{de}-term van 'n kwadratiese ry

Laat die n^{de}-term vir 'n kwadratiese ry gegee word deur

$$a_n = A \cdot n^2 + B \cdot n + C \quad (5)$$

waar A, B and C konstantes is wat bepaal moet word.

$$\begin{aligned} a_n &= A \cdot n^2 + B \cdot n + C \\ a_1 &= A(1)^2 + B(1) + C = A + B + C \\ a_2 &= A(2)^2 + B(2) + C = 4A + 2B + C \\ a_3 &= A(3)^2 + B(3) + C = 9A + 3B + C \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{Laat} d &= a_2 - a_1 \\ \therefore d &= 3A + B \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Rightarrow B = d - 3A \quad (8)$$

Die gemene tweede verskil word gekry vanaf

$$\begin{aligned} D &= (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1) \\ &= (5A + B) - (3A + B) \\ &= 2A \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Rightarrow A = \frac{D}{2} \quad (10)$$

Dus, vanuit (8),

$$B = d - \frac{3}{2} \cdot D \quad (11)$$

Vanuit (6),

$$C = a_1 - (A + B) = a_1 - \frac{D}{2} - d + \frac{3}{2} \cdot D \quad (12)$$

$$\therefore C = a_1 + D - d \quad (13)$$

Uiteindelik word die algemene formule vir die n^{de}term van 'n kwadratiese ry gegee deur

$$a_n = \frac{D}{2} \cdot n^2 + \left(d - \frac{3}{2} D\right) \cdot n + (a_1 - d + D) \quad (14)$$

Exercise 15: Die gebruik van die stel vergelykings
Bestudeer die volgende patroon: 1; 7; 19; 37; 61; ...

1. Wat is die volgende getal in die ry?
2. Gebruik veranderlikes om 'n algebraïese formula op te stel wat die patroon veralgemeen.
3. Wat sal die 100$^{\text{ste}}$ term van die ry wees?

Teken 'n grafiek van die terme van 'n kwadratiese ry

Die plot van a_n vs. n lewer 'n paraboliese grafiek vir 'n kwadratiese ry, gegee die kwadratiese ry

$$3;\ 6;\ 10;\ 15;\ 21;\ \ldots \quad (15)$$

Indien ons elke van die terme teenoor die ooreenstemmende indeks teken, kry ons die grafiek van 'n parabool.

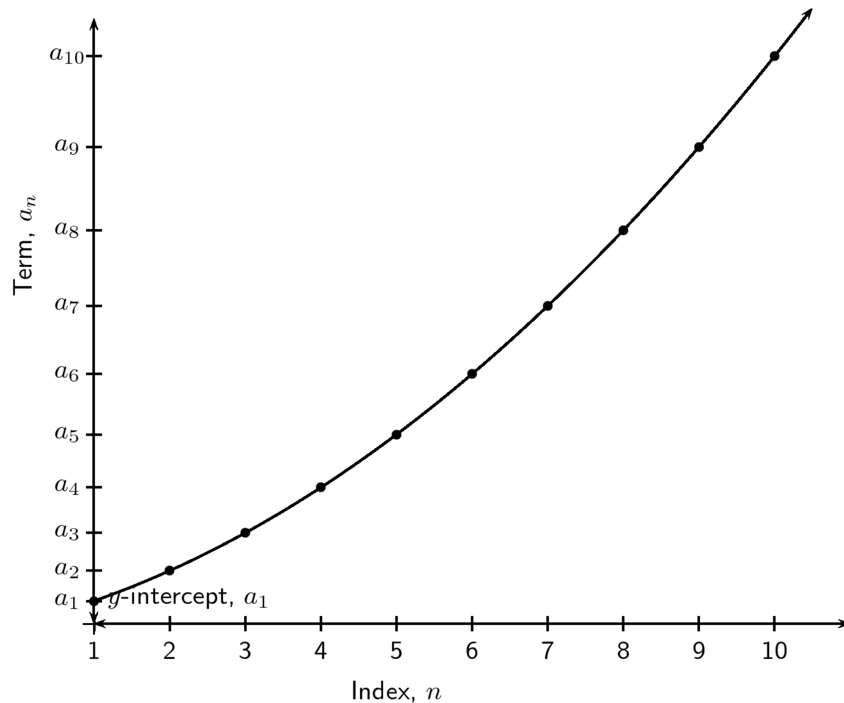


Figure 1

Oefeninge

1. Vind die eerste 5 terme van die kwadratiese ry gedefinieer deur:

$$a_n = n^2 + 2n + 1 \tag{16}$$

2. Bepaal watter van die volgende rye kwadraties is deur die gemene tweede verskille te bereken:
   a. $6; 9; 14; 21; 30; ...$
   b. $1; 7; 17; 31; 49; ...$
   c. $8; 17; 32; 53; 80; ...$
   d. $9; 26; 51; 84; 125; ...$
   e. $2; 20; 50; 92; 146; ...$
   f. $5; 19; 41; 71; 109; ...$
   g. $2; 6; 10; 14; 18; ...$
   h. $3; 9; 15; 21; 27; ...$
   i. $10; 24; 44; 70; 102; ...$
   j. $1; 2,5; 5; 8,5; 13; ...$
   k. $2,5; 6; 10,5; 16; 22,5; ...$
   l. $0,5; 9; 20,5; 35; 52,5; ...$
3. Gegee $a_n = 2n^2$, vind die waarde van n, $a_n = 242$
4. Gegee $a_n = (n-4)^2$, vind vir watter waarde van n, $a_n = 36$
5. Gegee $a_n = n^2 + 4$, vind die waarde van n, $a_n = 85$

6. Gegee $a_n = 3n^2$, vind a_{11}
7. Gegee $a_n = 7n^2 + 4n$, vind a_9
8. Gegee $a_n = 4n^2 + 3n - 1$, vind a_5
9. Gegee $a_n = 1,5n^2$, vind a_{10}
10. Vir elke van die kwadratiese rye, vind die gemene tweede verskil, die formule vir die algemene term en gebruik dan die formule om a_{100} te vind.

    a. $4, 7, 12, 19, 28, ...$
    b. $2, 8, 18, 32, 50, ...$
    c. $7, 13, 23, 37, 55, ...$
    d. $5, 14, 29, 50, 77, ...$
    e. $7, 22, 47, 82, 127, ...$
    f. $3, 10, 21, 36, 55, ...$
    g. $3, 7, 13, 21, 31, ...$
    h. $3, 9, 17, 27, 39, ...$

Chapter 1

Finansiële wiskunde

1.1 Enkelvoudige depresiasie[1]

1.1.1 Inleiding

In Graad 10 was die konsepte van enkelvoudige en saamgestelde rente bekendgestel. In hierdie hoofstuk gaan ons hierdie konsepte verder uitbrei, en dus is dit 'n goeie idee om weer terug te gaan na die Finasiële hoofstuk en die inhoud wat jy in Graad 10 geleer het, te hersien. As jy die tegnieke in hierdie hoofstuk bemeester, dan sal jy waardevermindering verstaan en in staat wees om te kan bepaal watter bank die beste rentekoers bied.

1.1.2 Waardevermindering

Daar word gesê dat wanneer jy met 'n nuwe motor vanaf die motorhandelaar wegry, die motor 20% van sy waarde verloor, want dit is nou "tweedehands". En met verloop van tyd daal die waarde, of *verminder* die waarde. Tweedehandse motors is goedkoper as nuwe motors, en gewoontlik hoe ouer die motor is, hoe goedkoper is dit. As jy 'n tweedehandse motor vanaf 'n handelaar koop, dan sal hulle die prys op iets baseer wat ons die *boekwaarde* van die motor, noem.

Die boekwaarde van 'n motor is die waarde van die motor na verlies aan waarde as gevolg van slytasie, veroudering en gebruik daarvan, in ag geneem is. Ons noem hierdie verlies aan waarde *waardevermindering*, en in hierdie afdeling gaan ons twee metodes om waardevermindering te bepaal, bestudeer. Net soos met rentekoers, is die twee metodes om waardevermindering te bepaal, *enkelvoudige* en *saamgestelde* metodes.

Die terminologie verbonde aan enkelvoudige waardevermindering is **reglynige waardevermindering** en vir saamgestelde waardevermindering is dit **verminderende balans/saldo waardevermindering**. Met die reglynige metode word die waarde van die bate elke jaar met dieselfde vaste bedrag verminder. Met die saamgestelde metode word die waarde elke jaar met dieselfde persentasie verminder. Dit beteken dat die waarde van die bate nie elke jaar met 'n vaste bedrag verminder nie, maar die verlies is die grootste in die eerste jaar, dan met 'n kleiner bedrag in die tweede jaar en met nog 'n kleiner bedrag in die derde jaar, en so voorts.

1.1.2.1 Waardevermindering

Jy mag dalk wonder hoekom ons waardevermindering moet kan bereken. Een rede is om die waarde van 'n bate (soos in die voorbeeld met die tweedehandse motor) te bepaal, maar daar is 'n meer finansiële rede vir die berekening van waardevermindering - belasting! Maatskappye mag waardevermindering in ag neem as 'n uitgawe, en sodoende hulle belasbare inkomste verminder. 'n Laer belasbare inkomste beteken dat die maatskappy sal minder inkomstebelasting aan die Inkomstediens betaal.

[1] This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39189/1.1/>.

1.1.3 Enkelvoudige Waardevermindering

Kom ons keer terug na tweedehandse motors. Een manier om waardevermindering te bepaal is om te veronderstel dat die motor 'n beperkte bruikbare leeftyd het. Enkelvoudige waardevermindering neem aan dat die waarde van die motor met 'n vaste bedrag elke jaar verminder. Byvoorbeeld, veronderstel die beperkte bruikbare leeftyd van 'n motor is 5 jaar, en die motor kos R60 000 vandag. Dit beteken dat na 5 jaar sal jy 'n nuwe motor moet koop, wat beteken die oue sal geen waarde op daardie tydstip meer hê nie. Daarom bereken ons die waardevermindering soos volg:

$$\frac{R60\ 000}{5 \text{ jaar}} = R12\ 000 \quad \text{per jaar.} \tag{1.1}$$

Die waarde van die motor is dan:

Aan die einde van Jaar 1	R60 000 - 1×(R12 000)	= R48 000
Aan die einde van Jaar 2	R60 000 - 2×(R12 000)	= R36 000
Aan die einde van Jaar 3	R60 000 - 3×(R12 000)	= R24 000
Aan die einde van Jaar 4	R60 000 - 4×(R12 000)	= R12 000
Aan die einde van Jaar 5	R60 000 - 5×(R12 000)	= R0

Table 1.1

Dit lyk baie soos die formule vir enkelvoudige rente:

$$\text{Totale rente na n jaar} = n \times (P \times i) \tag{1.2}$$

waar i die jaarlikse persentasie rentekoers en P die hoofsom of kapitaal is.

As ons die woord *rente* met die woord *waardevermindering* vervang, en die woord *hoofsom* met die woorde *oorspronklike waarde*, dan kan ons die formule gebruik:

$$\text{Totale waardevermindering na n jaar} = n \times (P \times i) \tag{1.3}$$

Dan is die boekwaarde van die bate na n jaar:

$$\begin{aligned} \text{Oorspronklike waarde} - \text{Totale waardevermindering na n jaar} &= P - n \times (P \times i) \\ &= P(1 - n \times i) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Byvoorbeeld, die boekwaarde van 'n motor na 2 jaar kan eenvoudig bereken word as volg:

$$\begin{aligned} \text{Boekwaarde na 2 jaar} &= P(1 - n \times i) \\ &= R60\ 000\,(1 - 2 \times 20\%) \\ &= R60\ 000\,(1 - 0,4) \\ &= R60\ 000\,(0,6) \\ &= R36\ 000 \end{aligned} \tag{1.5}$$

soos verwag is.

Let op die verskil tussen die enkelvoudige rente berekeninge en die enkelvoudige waardevermindering berekeninge: rente voeg waarde tot die oorspronklike bedrag by, terwyl waardevermindering die waarde laat daal!

Oefening 1.1.1: Enkelvoudige Rente metode *(Solution on p. 29.)*
'n Motor het 'n waarde van R240 000 nou. As die waarde teen 'n tempo van 15% p.j. verminder met reglynige waardevermindering, wat is die motor na 5 jaar werd?

Oefening 1.1.2: Enkelvoudige waardevermindering *(Solution on p. 29.)*
'n Klein besigheid koop 'n fotokopieermasjien teen R12 000. Vir belastingopgawe verminder die eienaar die bate oor 3 jaar met die reglynige waardevermindering metode. Watter bedrag sal hy op die belastingsvorm invul na 1 jaar, na 2 jaar en dan na 3 jaar?

1.1.3.1 Herwinningswaarde

As ons dieselfde voorbeeld van die motor met 'n oorspronklike waarde van R60 000 beskou, en veronderstel ons kan die motor aan die einde van 'n 5 jaar periode vir R10 000 verkoop. Ons noem hierdie bedrag die "Herwinningswaarde".

Ons veronderstel nogsteeds enkelvoudige waardevermindering oor 'n bruikbare tydperk van 5 jaar, maar in plaas van waardevermindering op die volle waarde van die bate, neem ons nou die herwinningswaarde in ag. Dus word waardevermindering bereken op die bedrag wat ons verwag om nie te verhaal nie, i.e. R60 000 - R10 000 = R50 000.

Die jaarlikse waardevermindering kan dan bereken word: (R60 000 - R10 000) / 5 = R10 000.

In die algemeen, die formule vir enkelvoudige (reglynige) waardevermindering is:

$$\text{Jaarlikse waardevermindering} = \frac{\text{Oorspronklike waarde} - \text{Herwinningswaarde}}{\text{Bruikbare leeftyd}} \tag{1.6}$$

1.1.3.2 Enkelvoudige Waardevermindering

1. 'n Besigheid koop 'n vragmotor vir R560 000. Oor 'n tydperk van 10 jaar verminder die waarde (met die reglynige metode) van die vragmotor tot R0. Wat is die vragmotor na 8 jaar werd?
2. Shrek wil sy oupa se donkie vir R800 koop. Sy oupa is te vrede met hierdie aanbod, aangesien die waarde van die donkie teen 3% per jaar, met die reglynige metode, verminder het. Sy oupa het die donkie 5 jaar terug gekoop. Wat het sy oupa oorspronklik vir die donkie betaal?
3. Sewe jaar gelede het Rocco se dromstel hom R12 500. Dit is nou R2 300 werd. Watter koers van enkelvoudige waardevermindering word hierdeur voorgestel?
4. Fiona koop 'n DStv satellietskottel vir R3 000. Weens verwering verminder die waarde daarvan enkelvoudig teen 15% per jaar. Hoe lank neem dit vir die skottel om geen waarde te hê nie?

1.2 Saamgestelde depresiasie[2]

1.2.1 Saamgestelde depresiasie

Die tweede metode om waardevermindering te bereken is om te veronderstel dat die waarde van die bate afneem teen 'n sekere jaarlikse koers, maar dat die aanvanklike waarde van die bate hierdie jaar, is die boekwaarde van die bate aan die einde van verlede jaar.

Byvoorbeeld, as ons tweedehandse motor 'n beperkte nuttige lewensduur van 5 jaar het en dit het 'n aanvanklike waarde van R60 000 , dan is die rentekoers van waardevermindering 20% (100% / 5 jaar). Na

[2] This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39130/1.1/>.

1 jaar, is die motor werd :

$$\begin{aligned}\text{Boekwaarde na eerste jaar} &= P\,(1-n\times i)\\ &= R60\ 000\,(1-1\times 20\%)\\ &= R60\ 000\,(1-0,2)\\ &= R60\ 000\,(0,8)\\ &= R48\ 000\end{aligned} \tag{1.7}$$

Aan die begin van die tweede jaar is die motor se waarde nou R48 000; dus na twee jaar is die motor se waarde :

$$\begin{aligned}\text{Boekwaarde na tweede jaar} &= P\,(1-n\times i)\\ &= R48\ 000\,(1-1\times 20\%)\\ &= R48\ 000\,(1-0,2)\\ &= R48\ 000\,(0,8)\\ &= R38\ 400\end{aligned} \tag{1.8}$$

Ons kan hierdie waardes tabelleer

Einde van eerste jaar	R60 000 $(1-1\times 20\%)$=R60 000$(1-1\times 20\%)^1$	= R48 000,00
Einde van tweede jaar	R48 000 $(1-1\times 20\%)$=R60 000$(1-1\times 20\%)^2$	= R38 400,00
Einde van derde jaar	R38 400$(1-1\times 20\%)$=R60 000$(1-1\times 20\%)^3$	= R30 720,00
Einde van vierde jaar	R30 720$(1-1\times 20\%)$=R60 000$(1-1\times 20\%)^4$	= R24 576,00
Einde van vyfde jaar	R24 576$(1-1\times 20\%)$=R60 000$(1-1\times 20\%)^5$	= R19 608,80

Table 1.2

Ons kan nou die algemene formule vir die boekwaarde van 'n bate neerskryf indien die waardevermindering saamgesteld is.

$$\text{Oorspronklike waarde} - \text{Totale waardevermindering na n jaar} = P(1-i)^n \tag{1.9}$$

Byvoorbeeld, die boekwaarde van 'n motor na twee jaar kan eenvoudig soos volg bereken word:

$$\begin{aligned}\text{Boekwaarde na 2 jaar} &= P(1-i)^n\\ &= R60\ 000(1-20\%)^2\\ &= R60\ 000(1-0,2)^2\\ &= R60\ 000(0,8)^2\\ &= R38\ 400\end{aligned} \tag{1.10}$$

soos verwag.

Let daarop dat die verskil tussen die saamgestelde rente berekeninge en saamgestelde waardevermindering berekeninge is dat terwyl die rente waarde voeg by die aanvangsbedrag, die waardeverminderingbedrag die waarde verminder!

Exercise 1.2.1: Saamgestelde waardevermindering *(Solution on p. 29.)*

Die Flamingo bevolking van die Bergrivier mond verminder teen 'n koers van 12% p.a. As daar nou 3 200 flaminke in die vleilande van die Bergrivier mond is, hoeveel sal daar wees na 5 jaar? Beantwoord tot drie beduidende syfers.

Exercise 1.2.2: Saamgestelde waardevermindering *(Solution on p. 29.)*
Saamgestelde waardevermindering
Farmer Brown koop 'n trekker vir R250 000 en dit verminder in waarde teen 20% per jaar saamgestelde waardevermindering . Wat is die gedepresieerde waarde van die trekker na 5 jaar?

1.2.1.1 Saamgestelde Waardevermindering

1. Op 1 Januarie 2008 is die waarde van my Kia Sorento R320 000. Elke jaar daarna, sal die motor se waarde verminder teen 20% van die vorige jaar se waarde. Wat is die waarde van die motor op 1 Januarie 2012?
2. Die bevolking van Bonduel verminder teen 'n koers van 9,5% per jaar soos mense na die stede migreer. Bereken die afname in die bevolking oor 'n tydperk van 5 jaar indien die aanvanklike bevolking 2 178 000 is.
3. 'n 20 kg waatlemoen bestaan uit 98% water. As dit buite in die son gelaat word, verloor dit 3% van sy water elke dag. Hoeveel sal dit weeg na 'n maand van 31 dae?
4. 'n Rekenaar verminder in waarde teen x% per annum as die verminderde saldo metode gebruik word. Vier jaar gelede was die rekenaar se waarde R10 000 en dit is nou R4 520 werd. Bereken die waarde van x korrek tot twee desimale plekke.

1.3 Huidige en toekomstige waardes[3]

1.3.1 Huidige Waarde of Toekomstige Waarde van 'n Belegging of Lening

1.3.1.1 Nou of later

Toe ons enkelvoudige en saamgestelde rente gedoen het, het ons begin met 'n bedrag geld wat ons nou het, en toe bereken wat dit werd sal wees oor 'n tydperk in die toekoms. Of die geld geleen of belê was, ons het bereken hoeveel die totale waarde sal wees op 'n spesifieke dag in die toekoms. Ons noem hierdie waardes *toekomstige waardes*.

Dit is egter ook moontlik om te kyk na 'n bedrag geld in die toekoms, en dan uit te werk wat sy waarde nou is. Dit word 'n *huidige waarde* genoem.

Byvoorbeeld, as R1 000 nou belê word in 'n bankrekening, is die toekomstige waarde die bedrag wat dit werd sal wees op 'n spesifieke dag in die toekoms. Aan die ander kant, as R1 000 benodig word op 'n sekere tydstip in die toekoms, dan kan die huidige waarde bereken word deur terug te werk - met ander woorde, hoeveel geld moet nou belê word om aan te groei tot R1 000 op die spesifieke dag in die toekoms?

Die vergelyking wat ons tot dusver gebruik het vir saamgestelde rente, wat die verband gee tussen die beginsaldo (P), die eindsaldo (A), die rentekoers (i as 'n koers per jaar) en die tydperk (n in jare) is:

$$A = P \cdot (1+i)^n \quad (1.11)$$

Deur eenvoudig P op te los in plaas van A, kry ons dat:

$$P = A \cdot (1+i)^{-n} \quad (1.12)$$

Dit kan ook soos volg geskryf word, alhoewel die vorige vorm gewoonlik verkies word.

$$P = \frac{A}{(1+i)^n} \quad (1.13)$$

[3]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39109/1.1/>.

Kom ons dink nou wat hier gebeur. In vergelyking (1.11), begin ons met 'n bedrag geld en laat dit aangroei vir n jaar. In vergelyking (1.12) het ons die waarde van die geld oor n jaar, en ons neem die rente weg vir n jaar, om die bedrag te kry wat dit nou werd is.

Ons kan dit soos volg toets. As ek nou R1 000 het wat ek belê vir 5 jaar teen 10% per jaar, dan het ek:

$$\begin{aligned} A &= P\cdot(1+i)^n \\ &= R1\ 000(1+10\%)^5 \\ &= R1\ 610,51 \end{aligned} \quad (1.14)$$

aan die einde. MAAR, as ek weet dat ek oor 5 jaar R1 610,51 nodig het, moet ek nou belê:

$$\begin{aligned} P &= A\cdot(1+i)^{-n} \\ &= R1\ 610,51(1+10\%)^{-5} \\ &= R1\ 000 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Ons eindig met R1 000 wat - as jy daaraan dink - dieselfde is as waarmee ons begin het. Kan jy dit sien?

Natuurlik kan ons dieselfde tegnieke gebruik om 'n huidige waarde te bereken as die belegging teen enkelvoudige rente was - ons gebruik net die vergelyking vir enkelvoudige rente en los die beginsaldo op.

$$A = P\left(1+i\times n\right) \quad (1.16)$$

Deur P op te los, kry ons:

$$P = A/\left(1+i\times n\right) \quad (1.17)$$

Kom ons sê jy benodig 'n bedrag van R1 210 oor 3 jaar, en die bank betaal *Enkelvoudige Rente* teen 7% per jaar. Hoeveel moet jy dan vandag in hierdie bankrekening belê?

$$\begin{aligned} P &= \frac{A}{1+n\cdot i} \\ &= \frac{R1\ 210}{1+3\times 7\%} \\ &= R1\ 000 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Lyk dit bekend? Gaan terug na die uitgewerkte voorbeeld by enkelvoudige rente in Graad 10. Daar het ons begin met 'n bedrag van R1 000 en gekyk wat die waarde sal wees na 3 jaar teen enkelvoudige rente. Nou het ons teruggewerk om te sien hoeveel geld ek nou benodig as 'n beginsaldo om te groei na 'n eindsaldo van R1 210.

In die praktyk word huidige waardes meestal bereken teen saamgestelde rente. Dus, tensy jy spesifiek gevra word om 'n huidige waarde te bereken teen enkelvoudige rente, maak seker jy gebruik die saamgestelde rente formule!

1.3.1.1.1 Huidige en Toekomstige Waardes

1. Na 'n tydperk van 20 jaar, het Josh se belegging gegroei na 'n eindbedrag van R313 550. Hoeveel het hy belê as rente bereken is teen 13,65% p.j. haljaarliks saamgestel vir die eerste 10 jaar, daarna teen 8,4% p.j. kwartaalliks saamgestel vir die volgende vyf jaar, en 7,2% p.j. maandeliks saamgestel vir die oorblywende tydperk?
2. 'n Lening moet terugbetaal word in twee gelyke haljaarlikse paaimente. As die rentekoers 16% per jaar, halfjaarliks saamgestel, is en elke paaiement is R1 458, bepaal die bedrag wat geleen is.

1.4 Vind i en n[4]

1.4.1 Vind die waarde van i

Op hierdie stadium in jou studies van finansies in wiskunde het jy nog altyd geweet watter rentekoers om in jou berekeninge te gebruik, asook vir watter tydperk die belegging of lening sal duur. Tot nou toe het jy 'n bekende beginpunt gehad en die toekomstige waarde is bereken, of alternatiewelik het jy die toekomstige waarde gehad om mee te begin en jy moet die huidige waarde bereken.

Daar is egter ander vrae wat jy ook kan vra:

1. Ek wil R2 500 leen van my buurvrou wat gesê het dat ek haar binne 8 maande R3 000 kan terugbetaal. Hoeveel rente vra my buurvrou moet aan haar betaal?
2. Ek sal oor 1,5 jaar R450 benodig vir universiteitshandboeke. Ek het tans R400. Watter rentekoers moet ek verdien om hierdie mikpunt te behaal?

Elke keer wanneer jy iets sien wat jy voorheen nog nie gesien het, begin altyd met die basiese vergelyking wat alreeds bekend is aan jou.

$$A = P \cdot (1+i)^n \qquad (1.19)$$

Indien hierdie 'n algebraïese probleem was en jy word gevra om "die waarde van i te vind", dan sal jy die volgende moet kan bewys:

$$\begin{aligned} \frac{A}{P} &= (1+i)^n \\ (1+i) &= \left(\frac{A}{P}\right)^{1/n} \\ i &= \left(\frac{A}{P}\right)^{1/n} - 1 \end{aligned} \qquad (1.20)$$

Jy het nie nodig op hierdie afgeleide vergelyking te memoriseer nie, dit is maklik genoeg om dit af te lei wanneer jy dit sal nodig kry!

Kom ons kyk na die twee voorbeelde wat hier bo genoem is.

1. Maak seker dat jy saamstem dat P=R2 500, A=R3 000, n=8/12=0,666667. Dit beteken dat:

$$\begin{aligned} i &= \left(\frac{R3\ 000}{R2\ 500}\right)^{1/0{,}666667} - 1 \\ &= 31{,}45\% \end{aligned} \qquad (1.21)$$

   O, aarde!! Daardie is verseker nie 'n baie vrygewige buurvrou van jou nie.
2. Maak seker dat P=R400, A=R450, n=1,5

$$\begin{aligned} i &= \left(\frac{R450}{R400}\right)^{1/1{,}5} - 1 \\ &= 8{,}17\% \end{aligned} \qquad (1.22)$$

   Hierdie beteken dat solank jy 'n bank vind wat meer rente betaal as 8,17%, sal jy die geld hê wat jy benodig!

Let op dat in beide voorbeelde druk ons n uit as 'n aantal jare ($\frac{8}{12}$ jare, nie 8 nie omdat dit die aantal maande is) wat beteken dat die jaarlikse rentekoers is i. Hou altyd die volgende in gedagte - hou die jare by die jare om onnodige foute uit te skakel.

[4] This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39234/1.1/>.

1.4.1.1 Vind die waarde van i

1. 'n Masjien kos R45 000 en het 'n skrootwaarde (waarde waarteen die masjien afgeskryf word) van R9 000 na 10 jaar. Bepaal die jaarlikse waardeverminderingskoers as dit bereken word op die verminderdesaldo-metode.
2. Na 5 jaar het die belegging verdubbel in waarde. Teen watter jaarlikse koers is die rente saamgestel?

1.4.2 Vind n - Toets en Probeer

Jy behoort nou die patroon raak te sien. Ons het die standaard formule wat 'n verskeidenheid van veranderlikes bevat:

$$A = P \cdot (1 + i)^n \tag{1.23}$$

Ons het A opgelos (in Graad 10), P (in "Verteenwoordig Waardes of Toekomstige Waardes van 'n Belegging of Lening") en i (in "Vind die waarde van i" (Section 1.4.1: Vind die waarde van i)). Nou gaan ons n oplos. Met ander woorde, as ons weet wat die waarde van die geld is in die begin en hoeveel dit vermeerder, en as ons weet watter rentekoers van toepassing is - dan kan ons bereik hoe lank die geld belê moet word vir die geldsake om te klop.

Hierdie afdeling sal n bereken deur toets en probeer en deur gebruik te maak van 'n sakrekenaar. Die behoorlike algebraïese oplossing sal in Graad 12 geleer word.

Wanneer ons n oplos, kan ons die volgende skryf:

$$\begin{array}{rcl} A & = & P(1+i)^n \\ \frac{A}{P} & = & (1+i)^n \end{array} \tag{1.24}$$

Nou moet ons die betrokke getalle bestudeer om te probeer om vas te stel wat die waarde van n is. Verwys na ons Graad 10 notas vir metodes hoe om n te vind.

Oefening 1.4.1: Beleggingstermyn - Toets en Probeer *(Solution on p. 30.)*

Ons belê R3 500 in 'n spaarrekening wat 7,5% saamgestelde rente betaal vir 'n onbekende tydperk, teen die einde van hierdie tydperk is daar R4 044,69 in die rekening. Vir hoe lank is die geld belê?

1.4.2.1 Vind n - Toets en Probeer

1. 'n Maatskappy koop twee tipes motorvoertuie: Die Acura kos R80 600 en die Brata R101 700 BTW ingesluit. Die Acura verminder waarde teen 15,3% per jaar, jaarliks saamgestel, en die Brata teen 19,7% per jaar, ook jaarliks saamgestel. Na hoeveel jaar sal die boekiewaarde van die twee modelle dieselfde wees?
2. Die petrol in die tenk van 'n vragmotor verminder elke minuut teen 5,5% van die hoeveelheid in die tenk teen daardie tydstip. Bereken na hoeveel minute daar minder as $30l$ in die tenk sal wees as daar oorspronklik $200l$ in die tenk was.

1.5 Nominale en effektiewe rentekoerse[5]

1.5.1 Nominale en Effektiewe Rentekoers

So ver het ons die jaarlikse rentekoerse bespreek, waar die rente aangehaal word as 'n per jaar bedrag. Hoewel dit nie uitdruklik vermeld was nie, het ons aanvaar dat die rente aangehaal word op 'n jaarlikse basis. Dit bedoel dat die rente betaal word een keer per jaar.

[5]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39145/1.1/>.

Rente mag meer as een keer per jaar betaal word, byvoorbeeld, ons kan rente ontvang op 'n maandlikse basis, d.w.z. 12 keer per jaar. Nou, hoe vergelyk ons maandlikse rentkoers met jaarlikse rentekoers? Dit bring vir ons nader aan die konsep van effektiewe jaarlikse rentkoers.

Een manier om verskillende tariewe en metodes van rente betaling te vergelky sou wees om die Eindsaldo's onder die verskillende opsies te vergelyk, vir 'n gegewe Openingsbalans. 'n Ander, meer algemeen manier is om die "effektiewe jaarlikse rentekoers" te bereken en vergelyk op elke opsie. Op hierdie manier, ongeag van die verskille in hoe die rente betaal word, kan ons apples met apples vergelyk.

Byvoorbeeld, 'n spaarrekening met 'n opening saldo van R1000.00 bied 'n saamgestelde rentekoers van 1% per maand wat aan die einde van elke maand betaal word. Ons kan die opgehoopte balans bereken aan die einde van die jaar met die gebruik van die formules van die vorige afdeling. Maar wees versigtig, want ons rentekoers is gegee as 'n maandlikse koers, so ons moet dieselfde eenhede (in maande) vir ons tydperk van meting gebruik.

> TIP: Onthou, die wenk om die formule te gebruik is om die tydperk te omskryf, en die rentekoers wat relevant is vir die tydperk te gebruik.

So ons kan die bedrag wat opgehoop sal word aan die einde van jaar een bereken soos volg:

$$\begin{aligned} \text{Eindosaldo na 12 maande} &= P \times (1+i)^n \\ &= R1\ 000 \times (1+1\%)^{12} \\ &= R1\ 126,83 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Letop, omdat ons 'n maandlikse tydperk gebruik, het ons gebruik $n = 12$ maande om die balans aan die einde van een jaar te bereken.

Die effetiewe jaarlikse rentkoers is 'n jaarlikse rentekoers wat die ekwivalent per-jaar-rentekoers aanvaar saamgestelde

Dit is die jaarlikse rentekoers in ons Saamgestelde Rente vergelyking wat gelykstaan aan dieselfde opgehoopte balans na een jaar. Ons moet dus die effektiewe jaarlikse rentekoers op los sodat die opgehoopte balans gelyk is aan ons berekende bedrag van R1 126,83.

Ons gebruik i_{12} om die maandlikse rentekoers aan te dui. Ons het hierdie notasie hier om te onderskei tussen die jaarlikse rentekoers, i. Spesifiek, moet ons vir i oplos in die volgende vergelyking:

$$\begin{aligned} P \times (1+i)^1 &= P \times (1+i_{12})^{12} \\ (1+i) &= (1+i_{12})^{12} && \text{deel beide kante met P} \\ i &= (1+i_{12})^{12} - 1 && \text{trek af 1 van beide kante} \end{aligned} \tag{1.26}$$

Byvoorbeeld, dit beteken dat die effektiewe jaarlikse koers vir 'n maandelikse tarief $i_{12} = 1\%$ is:

$$\begin{aligned} i &= (1+i_{12})^{12} - 1 \\ &= (1+1\%)^{12} - 1 \\ &= 0,12683 \\ &= 12,683\% \end{aligned} \tag{1.27}$$

As ons die eindsaldo herbereken met die gebruik van hierdie jaarlikse koers kry ons:

$$\begin{aligned} \text{Eindsaldo na 1 jaar} &= P \times (1+i)^n \\ &= R1\ 000 \times (1+12,683\%)^1 \\ &= R1\ 126,83 \end{aligned} \tag{1.28}$$

en dit is dieselfde antwoord wat ons kry vir 12 maande.

Letop dat dit meer grooter is as waneer jy net maandlikse bedrag met 12 maal ($12 \times 1\% = 12\%$) as gevolg van die effek van saamestelling. Die verskil is te wyte aan rente op rente. Ons het dit al gesien, maar dit is 'n belangrik.

1.5.1.1 Die Algemene Formule

So ons weet hoe om 'n maandlikse rentekoers omteskep in 'n effektiewe jaarlikse rente. Net so kan ons 'n kwartaallikse belangstelling, of 'n semi-jaarlikse rentekoers of 'n rentkoers van enige frekwensie omteskep in 'n effektiewe jaarlikse rentkoers.

Vir 'n kwartaallikse rentekoers van ongeveer 3% perkwartaal, sal die rente betaal word vier keer per jaar (elke drie maande). Ons kan die effetiewe jaarlikse rentekoers bereken deur die oplos van i:

$$P\left(1+i\right) = P{(1+i_4)}^4 \tag{1.29}$$

waar i_4 die kwartaallikse rentekoers is.

So $(1+i) = {(1,03)}^4$, en so $i = 12,55\%$. Dit is die effektiewe jaarlikse rentkoers.

In die algemeen, vir rente betaal teen 'n frekwensie van T keer per jaar, hou die volgende vergelyking:

$$P\left(1+i\right) = P{(1+i_T)}^T \tag{1.30}$$

waari_T is die betaalde rentkoers T keer per jaar.

1.5.1.2 De-kodering van die Terminologie

Mark konvensie is egter nie om die rentekoers te stel as sê 1% per maand, meer eerder om hierdie bedrag uit te druk as 'n jaarlikse bedrag wat in hierdie voorbeeld sal maandliks betaal word. Hierdie jaarlikse bedrag word aan die nominale bedrag genoem.

Die mark-ooreenkoms is 'n nominale rentkoers van "12% per jaar wat maandeliks betaal word" in plaas van te sê ('n effektiewe) 1% per maand aan te haal. Ons weet van die voorige voorbeeld, dat 'n nominale rentkoers van 12% per jaar maandeliks betaal gelykstaande aan 'n effektiewe jaarlikse rentkoers van 12,68%, en die verskil is as gevolg van die rente-op-rente.

So as jy 'n rentekoers uitdruk as 'n jaarlikse koers, maar meer dikwels as jaarlikse betaal, moet ons eers die werklike rente betaal per periode te bereken om die ffektiewe jaarlikse rentekoers te bereken.

$$\text{maandelikse rentekoers} = \frac{\text{Nominale rentekoers per jaar}}{\text{aantal periodes per jaar}} \tag{1.31}$$

Byvoorbeeld, die maandelikse rente-koers op 12% rente per jaar wat maandeliks betaal word, is:

$$\begin{aligned} \text{maandelikse rentekoers} &= \frac{\text{Nominale rentekoers per jaar}}{\text{aantal periodes per jaar}} \\ &= \frac{12\%}{12 \text{ maande}} \\ &= 1\% \text{ per maand} \end{aligned} \tag{1.32}$$

Dieselfde beginsel is van toepassing op ander frekwensies van betaling.

Exercise 1.5.1: Nominale Rentekoers ***(Solution on p. 30.)***

Dink aan 'n spaarrekening wat 'n nominale rente teen 8% per jaarbetaal, kwartaalliks betaal. Bereken (a) die rente bedrag wat elke kwartaal betaal word, en (b) die effektiewe jaarlikse rentekoers.

Exercise 1.5.2: Nominale Rentekoers ***(Solution on p. 31.)***

Op hul spaar rekeninge, bied Echo Bank 'n rentekoers van 18% nominaal wat maandeliks betaal word. As jy R100 nou stoor in so 'n rekening, hoeveel sal die bedrag ophoop in 3 jaar se tyd?

1.5.1.2.1 Nominale en Effectiewe Rentekoerse

1. Bereken die effektiewe koers gelykstaande aan 'n nominale rentekoers van 8,75% pj maandeliks saamgestel.
2. Cebela kry 'n kwotasie vir 'n nominale rentekoers van 9,15% per jaar op haar belegging van elke vier maande saamgestel R 85 000. Bereken die effektiewe koers per jaar.

1.5.2 Formuleblad

As 'n maklike verwysing, hier is die belangrikste formules dat ons afgelei en wat gebruik word in hierdie hoofstuk. Terwyl die memorisering van hulle mooi is(daar is nie baie), is dit die toepassing wat nuttig is. Finansiële kundiges kry nie 'n salaris om formules te verkondig nie, 'n salaris word betaal om die regte metodes te gebruik om die finansiële probleme op te los.

1.5.2.1 Definisies

P	Principal (die bedrag geld by die beginpunt van die berekening)
i	rentekoers, gewoonlik die effektiewe koers per jaar
n	tydperk waarvoor die belegging gemaak word
i_T	die rentekoers betaal T keer per jaar, i.e. $i_T = \frac{\text{Nominale rentekoers}}{T}$

Table 1.3

1.5.2.2 Vergelykings

$$\begin{aligned}
\text{Gewone toename}: A &= P\left(1 + i \times n\right) \\
\text{Saamgestelde vermeerdering}: A &= P(1+i)^n \\
\text{Gewone afname}: A &= P\left(1 - i \times n\right) \\
\text{Saamgestelde vermindering}: A &= P(1-i)^n \\
\text{Effektiewe jaarlikse rentekoers}\,(i): (1+i) &= (1+i_T)^T
\end{aligned} \tag{1.33}$$

1.5.3 Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Shrek koop 'n Mercedes werd R385 000 in 2007. Wat sal die waarde van die Mercedes wees teen die einde van 2013 as
   a. die motor depresieer teen 6% p.a. reguit-lyn waardevermindering
   b. die motor depresieer teen 12% p.a. die vermindering van-balans waardevermindering.
2. Greg tree in 'n 5-jaar huurkoop ooreenkoms om' n rekenaar te koop vir R8 900. Die rentekoers is aangehaal as 11% per jaar enkelvoudige rente. Bereken die maandelikse paaiement vir hierdie kontrak.
3. 'n Rekenaar is gekoop vir R16 000. Dit depresieer teen 15% per jaar.
   a. Bereken die boekwaarde van die rekenaar na 3 jaar indien waardevermindering bereken word volgens die reguitlyn-metode.
   b. Bepaal die rentekoers, volgens die afnemende-saldo-metode, wat jou sal opbrengs van die selfde boekwaarde as in list, p. 27 na 3 jaar.

4. Maggie belê R12 500,00 vir 5 jaar teen 12% per jaar maandeliks saamgestel vir die eerste 2 jaar en 14% per jaar, halfjaarliks saamgestel vir die volgende 3 jaar. Hoe baie sal Maggie na 5 jaar in totaal ontvang?
5. Kuifie belê R120 000. Hy is aangehaal word 'n nominale rentekoers van 7,2% per jaar maandeliks saamgestel.
   a. Bereken die effektiewe koers per jaar korrek tot DRIE desimale plekke.
   b. Gebruik die effektiewe koers om die waarde te bereken van Kuifie se belegging indien Hy belê die geld vir 3 jaar.
   c. Veronderstel Kuifie belê sy geld vir 'n totale tydperk van 4 jaar, maar na 18 maande 'n onttrekking van R20 000, hoeveel sal hy ontvang aan die einde van die 4 jaar?
6. Paris maak rekeninge oop by 'n aantal klerewinkels en spandeer vrylik. Sy kry heself in vreeslike skuld en sy kan nie haar rekeninge betaal nie. Sy skuld Hilton mode-wêreld R5 000, en die winkel laat Paris die wetsontwerp teen 'n nominale rentekoers van 24% betaal maandeliks saamgestel.
   a. Hoeveel geld sal sy skuld Hilton mode-wêreld na twee jaar?
   b. Wat is die effektiewe rentekoers wat Hilton mode-wêreld haar hef?

Solutions to Exercises in Chapter 1

Oplossing to Exercise 1.1.1 (p. 18)

Step 1.

$$\begin{array}{rcc} P & = & R240\ 000 \\ i & = & 0,15 \\ n & = & 5 \\ A & \text{word} & \text{benodig} \end{array} \quad (1.34)$$

Step 2.

$$A = 240\ 000\,(1 - 0,15 \times 5) \quad (1.35)$$

Step 3.

$$\begin{array}{rcc} A & = & 240\ 000\,(1 - 0,75) \\ & = & 240\ 000 \times 0,25 \\ & = & 60\ 000 \end{array} \quad (1.36)$$

Step 4. Oor 5 jaar is die motor R60 000 werd.

Oplossing to Exercise 1.1.2 (p. 19)

Step 1. Die eienaar wil hê dat die waarde van die kopieermasjien na 3 jaar tot R0 verminder moet word. Dus, die waarde van die kopieermasjien sal met $12\ 000 \div 3 = R4\ 000$ per jaar verminder.
Step 2. $12\ 000 - 4\ 000 = R8\ 000$
Step 3. $8\ 000 - 4\ 000 = R4\ 000$
Step 4. $4\ 000 - 4\ 000 = 0$
Na 3 jaar is die kopieermasjien niks werd nie.

Solution to Exercise 1.2.1 (p. 20)

Step 1.

$$\begin{array}{rcc} P & = & R3\ 200 \\ i & = & 0,12 \\ n & = & 5 \\ A & \text{word} & \text{gevra} \end{array} \quad (1.37)$$

Step 2.

$$A = 3\ 200(1 - 0,12)^5 \quad (1.38)$$

Step 3.

$$\begin{array}{rcc} A & = & 3\ 200(0,88)^5 \\ & = & 3\ 200 \times 0,527731916 \\ & = & 1688,742134 \end{array} \quad (1.39)$$

Step 4. Daar sal ongeveer 1690 flaminke na 5 jaar wees

Solution to Exercise 1.2.2 (p. 21)

Oplossing

Step 1.

$$\begin{array}{rcl} P & = & R250\ 000 \\ i & = & 0,2 \\ n & = & 5 \\ A & \text{word} & \text{gevra} \end{array} \quad (1.40)$$

Step 2.

$$A = 250\ 000(1-0,2)^5 \quad (1.41)$$

Step 3.

$$\begin{array}{rcl} A & = & 250\ 000(0,8)^5 \\ & = & 250\ 000 \times 0,32768 \\ & = & 81\ 920 \end{array} \quad (1.42)$$

Step 4. Verminderde waarde na 5 jaar is R81 920

Oplossing to Exercise 1.4.1 (p. 24)

Step 1.
- P=R3 500
- i=7,5%
- A=R4 044,69

Ons word gevra om n te vind.

Step 2. Ons weet die volgende:

$$\begin{array}{rcl} A & = & P(1+i)^n \\ \frac{A}{P} & = & (1+i)^n \end{array} \quad (1.43)$$

Step 3.

$$\begin{array}{rcl} \frac{R4\ 044,69}{R3\ 500} & = & (1+7,5\%)^n \\ 1,156 & = & (1,075)^n \end{array} \quad (1.44)$$

Dis nou die tyd om die sakrekenaar uit te haal en 'n paar waardes vir n te probeer.

Moontlik$n$	$1,075^n$
1,0	1,075
1,5	1,115
2,0	1,156
2,5	1,198

Table 1.4

Ons sien dat n is naastenby 2.

Step 4. Die R3 500 is belê vir omtrent 2 jaar .

Solution to Exercise 1.5.1 (p. 26)

Step 1. Ons is gegee dat 'n spaarrekening 'n nominale rentekoers van 8% per kwartaal het. Ons is verplig om uit te vind:

- die kwartaallikse rentekoers, i_4

- die effektiewe jaarlikse rentekoers, i

Step 2. Ons weet dat:

$$\text{kwartlikse rente} - \text{koers} = \frac{\text{Nominale rente} - \text{koers per jaar}}{\text{aantel kwartale per jaar}} \quad (1.45)$$

en

$$P\,(1+i) = P(1+i_T)^T \quad (1.46)$$

waar T 4 is omdat daar 4 betalings is elke jaar.

Step 3.

$$\begin{aligned} \text{kwartaallikse rente koers} &= \frac{\text{Nominale rentekoers per jaar}}{\text{aantal periodes per jaar}} \\ &= \frac{8\%}{4\ \text{kwartale}} \\ &= 2\%\ \text{per kwartaal} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Step 4. Die effektiewe jaarlikse rente-koers (i) word bereken as:

$$\begin{aligned} (1+i) &= (1+i_4)^4 \\ (1+i) &= (1+2\%)^4 \\ i &= (1+2\%)^4 - 1 \\ &= 8,24\% \end{aligned} \quad (1.48)$$

Step 5. Die kwartaallikse rentekoers is 2% en die effektiewe jaarlikse rentekoers is 8,24%, vir 'n nominale rentekoers van 8% per kwartaal.

Solution to Exercise 1.5.2 (p. 26)

Step 1. Rente-koers is 18% nominaal wat maandliks betaal word. Daar is 12 maande in een jaar. Ons is besig met 'n jaarlikse tydperk, so $n = 3$. Die bedrag wat ons gespaar het, is R100, so $P = 100$. Ons kort die opgehoopte waarde, A.

Step 2. Ons weet dat

$$\text{monthly interest rate} = \frac{\text{Nominale rentekoers per jaar}}{\text{aantal periodes per jaar}} \quad (1.49)$$

vir die omskakeling van die nominale rentekoers tot effektiewe rentekoers, het ons

$$1 + i = (1+i_T)^T \quad (1.50)$$

en vir die berekening van opgehoopte waarde, het ons

$$A = P \times (1+i)^n \quad (1.51)$$

Step 3. Daar is 12 maande in 'n jaar, so

$$\begin{aligned} i_{12} &= \frac{\text{Nominale jaarlikse rentekoers}}{12} \\ &= \frac{18\%}{12} \\ &= 1,5\%\ \text{per maand} \end{aligned} \quad (1.52)$$

en dan het ons

$$\begin{aligned} 1+i &= (1+i_{12})^{12} \\ i &= (1+i_{12})^{12}-1 \\ &= (1+1,5\%)^{12}-1 \\ &= (1,015)^{12}-1 \\ &= 19,56\% \end{aligned} \tag{1.53}$$

Step 4.

$$\begin{aligned} A &= P \times (1+i)^n \\ &= 100 \times (1+19,56\%)^3 \\ &= 100 \times 1,7091 \\ &= 170,91 \end{aligned} \tag{1.54}$$

Step 5. Die geakkumuleerde waarde is R170, 91. (Onthou om af te rond tot die naaste cent.)

Chapter 2

Oplos van kwadratiese vergelykings

2.1 Faktorisering[1]

2.1.1 Inleiding

In graad 10 het ons gekyk na die oplos van lineêre vergelykings, kwadratiese vergelykings, eksponentieële vergelykings en lineêre ongelykhede. Hierdie hoofstuk bo op daardie werk. Ons kyk na verskillende metodes om kwadratiese vergelykings om te los.

2.1.2 Oplos deur Faktorisering

Die oplos van kwadratiese vergelylings deur faktorisering was behandel in Graad 10. Kom ons doen gou 'n voorbeeld om jou geheue te verfris.

Exercise 2.1.1: Oplos van Kwadratiese Vergelykings *(Solution on p. 44.)*
Losop die vergelyking, $2x^2 - 5x - 12 = 0$.

Dit is belangrik om te onthou dat 'n kwadratiese vergelyking in die vorm $ax^2 + bx + c = 0$ moet wees voor ons dit kan op los met die metodes.

Exercise 2.1.2: Los op die kwadratiese vergelyking met faktorisering *(Solution on p. 44.)*
Los op a: $a(a-3) = 10$

Exercise 2.1.3: Op los van breuke wat lei na 'n kwadratiese vergelyking *(Solution on p. 45.)*
Los op b: $\frac{3b}{b+2} + 1 = \frac{4}{b+1}$

2.1.2.1 Oplossing deur Faktorisering

Los op die volgende kwadratiese vergelykings op deur faktorisering. Sommige van die antwoorde kan gelos word in die wortel vorm.

1. $2y^2 - 61 = 101$
2. $2y^2 - 10 = 0$
3. $y^2 - 4 = 10$
4. $2y^2 - 8 = 28$
5. $7y^2 = 28$
6. $y^2 + 28 = 100$

[1] This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39135/1.1/>.

7. $7y^2 + 14y = 0$
8. $12y^2 + 24y + 12 = 0$
9. $16y^2 - 400 = 0$
10. $y^2 - 5y + 6 = 0$
11. $y^2 + 5y - 36 = 0$
12. $y^2 + 2y = 8$
13. $-y^2 - 11y - 24 = 0$
14. $13y - 42 = y^2$
15. $y^2 + 9y + 14 = 0$
16. $y^2 - 5ky + 4k^2 = 0$
17. $y(2y + 1) = 15$
18. $\frac{5y}{y-2} + \frac{3}{y} + 2 = \frac{-6}{y^2-2y}$
19. $\frac{y-2}{y+1} = \frac{2y+1}{y-7}$

2.2 Kwadraatsvoltooiing[2]

2.2.1 Kwadraatsvoltooiing

Ons het gesien dat die vergelyking in die vorm:

$$a^2x^2 - b^2 \tag{2.1}$$

bekend is as die verskil in vierkante en kan as volg gefaktoriseer word:

$$(ax - b)(ax + b). \tag{2.2}$$

Hierdie eenvoudige faktorisering lei na 'n ander tegniek om kwadratiese vergelykings op te los wat bekend staan as *kwadraatsvoltooiing*.

Ons wys met 'n eenvoudige voorbeeld, deur te probeer om vir x op te los in:

$$x^2 - 2x - 1 = 0. \tag{2.3}$$

Ons kan nie maklik faktore van hierdie term vind nie, maar die eerste twee terme lyk soortgelyk aan die eerste twee terme van die volmaakte vierkant:

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1. \tag{2.4}$$

Ons kan egter kul en 'n volmaakte vierkant skep deur 2 aan beide kante van die vergelyking te voeg.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ x^2 - 2x - 1 + 2 &= 0 + 2 \\ x^2 - 2x + 1 &= 2 \\ (x - 1)^2 &= 2 \\ (x - 1)^2 - 2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ons weet dat:

$$2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \tag{2.6}$$

[2]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39137/1.1/>.

wat beteken dat:

$$(x-1)^2 - 2 \quad (2.7)$$

is 'n verskil van vierkante. Ons kan dus skryf:

$$(x-1)^2 - 2 = \left[(x-1) - \sqrt{2}\right]\left[(x-1) + \sqrt{2}\right] = 0. \quad (2.8)$$

Die oplossing vir $x^2 - 2x - 1 = 0$ is dus:

$$(x-1) - \sqrt{2} = 0 \quad (2.9)$$

of

$$(x-1) + \sqrt{2} = 0. \quad (2.10)$$

Dit beteken $x = 1 + \sqrt{2}$ of $x = 1 - \sqrt{2}$. Hierdie voorbeeld toon die gebruik van *kwadraatsvoltooiing* om 'n kwadratiese vergelyking op te los.

2.2.1.1 Metode: Los Kwadratiese Vergelykings op deur Kwadraatsvoltooing

1. Skryf die vergelyking in die vorm $ax^2 + bx + c = 0$. bv. $x^2 + 2x - 3 = 0$
2. Neem die konstante oor na die regterkant van die vergelyking. Bv. $x^2 + 2x = 3$
3. Indien nodig stel die koëffisiënt van $x^2 = 1$, deur te deel deur die bestaande koëffisiënt.
4. Neem die helfte van die koëffisiënt van die x-term, kwadreer dit en voeg dit aan beide kante van die vergelyking. Bv. in $x^2 + 2x = 3$, die helfte van die koëffisiënt van die x-term is 1 en $1^2 = 1$. Daarom voeg ons 1 aan albei kante by om $x^2 + 2x + 1 = 3 + 1$ te kry.
5. Skryf die linkerkant as 'n volkome vierkant: $(x+1)^2 - 4 = 0$
6. Jy moet dan in staat wees om die vergelyking in terme van die verskil in vierkante te faktoriseer en dan vir x op te los: $(x + 1 - 2)(x + 1 + 2) = 0$

Exercise 2.2.1: Los Kwadratiese Vergelykings op deur Kwadraatsvoltooing *(Solution on p. 45.)*

Los op:

$$x^2 - 10x - 11 = 0 \quad (2.11)$$

deur kwadraatsvoltooiing.

Exercise 2.2.2: Los Kwadratiese Vergelykings op deur Kwadraatsvoltooing *(Solution on p. 46.)*

Los op:

$$2x^2 - 8x - 16 = 0 \quad (2.12)$$

deur kwadraatsvoltooiing.

Khan academy video on solving quadratics - 1

This media object is a Flash object. Please view or download it at
<http://www.youtube.com/v/bNQY0z76M5A&rel=0&hl=en_US&feature=player_embedded&version=3>

Figure 2.1

2.2.1.1.1 Kwadraatsvoltooiing oefeninge

Los die volgende vergelykings op deur kwadraatsvoltooiing:

1. $x^2 + 10x - 2 = 0$
2. $x^2 + 4x + 3 = 0$
3. $x^2 + 8x - 5 = 0$
4. $2x^2 + 12x + 4 = 0$
5. $x^2 + 5x + 9 = 0$
6. $x^2 + 16x + 10 = 0$
7. $3x^2 + 6x - 2 = 0$
8. $z^2 + 8z - 6 = 0$
9. $2z^2 - 11z = 0$
10. $5 + 4z - z^2 = 0$

2.3 Die kwadratiese formule[3]

2.3.1 Oplossing met die Kwadratiese Formule

Dit is nie altyd moontlik om 'n kwadratiese vergelyking met faktorisering op te los nie en soms is dit langdradig en ingewikkeld om kwadraatsvoltooiing toe te pas. In sulke gevalle kan jy van die *kwadratiese formule* gebruik maak, 'n metode wat die antwoorde van enige kwadratiese vergelyking oplewer.

Beskou die algemene vorm van 'n kwadratiese funksie:

$$f(x) = ax^2 + bx + c. \tag{2.13}$$

Haal die a as gemene faktor uit om te kry:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right). \tag{2.14}$$

Nou moet ons 'n bietjie speurwerk doen om te bepaal hoe om (2.14) na 'n volmaakte vierkant met 'n paar oorblywende terme te omskep. Ons weet dat om 'n volmaakte vierkant te hê:

$$(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 \tag{2.15}$$

en

$$(m-n)^2 = m^2 - 2mn + n^2 \tag{2.16}$$

Die sleutel is die middelterm aan die regterkant nl. $2\times$ die eerste term $\times$ die tweede term aan die linkerkant. Met (2.14) weet ons die eerste term is x en die tweede term is $\frac{b}{2a}$. Dit beteken that die tweede term aan die regterkant is $2\frac{b}{2a}x$. Dus,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2. \tag{2.17}$$

[3]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39139/1.1/>.

Nou maak ons gebruik van die feit dat as jy dieselfde hoeveelheid bytel en dan aftrek die uitdrukking dieselfde bly. As ons dus $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ aan die regterkant van (2.14) optel en aftrek kry ons:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left[x+\left(\frac{b}{2a}\right)\right]^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left[x+\left(\frac{b}{2a}\right)\right]^2\right)+c-\frac{b^2}{4a} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ons stel $f(x)=0$ om die wortels te vind, en verkry die volgende:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c \tag{2.19}$$

Deel nou deur a en neem die vierkantswortel van beide kante:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}} \tag{2.20}$$

Om eindelik vir x op te los impliseer:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}} \\ &= -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \end{aligned} \tag{2.21}$$

wat verder vereenvoudig kan word tot:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2.22}$$

Hierdie is die algemene oplossings vir 'n kwadratiese vergelyking. Let daarop dat daar gewoonlik twee oplossings is, maar dat hul nie noodwendig bestaan nie, afhangende van die uitdrukking b^2-4ac (onder die vierkantswortel) se teken. Hierdie oplossings word ook die *wortels* van 'n kwadratiese vergelyking genoem.

Exercise 2.3.1: Gebruik van die kwadratiese formule ***(Solution on p. 46.)***

Vind die wortels van die funksie $f(x)=2x^2+3x-7$.

Exercise 2.3.2: Die gebruik van die kwadratiese formule sonder oplossing ***(Solution on p. 47.)***

Vind die oplossings vir die kwadratiese vergelyking $x^2-5x+8=0$.

Khan academy video on quadratic equations - 2

This media object is a Flash object. Please view or download it at
<http://www.youtube.com/v/iulx0z1lz8M&rel=0&hl=en_US&feature=player_embedded&version=3>

Figure 2.2

2.3.1.1 Oplossing met die Kwadratiese Formule

Los op vir t deur gebruik te maak van die kwadratiese formule.

1. $3t^2 + t - 4 = 0$
2. $t^2 - 5t + 9 = 0$
3. $2t^2 + 6t + 5 = 0$
4. $4t^2 + 2t + 2 = 0$
5. $-3t^2 + 5t - 8 = 0$
6. $-5t^2 + 3t - 3 = 0$
7. $t^2 - 4t + 2 = 0$
8. $9t^2 - 7t - 9 = 0$
9. $2t^2 + 3t + 2 = 0$
10. $t^2 + t + 1 = 0$

TIP:

- In al die behandelde voorbeelde is die antwoorde in wortelvorm gelaat, alhoewel dit ook in desimale vorm geskryf kan word met behulp van 'n sakrekenaar. In 'n toets of eksamen, let op die vraag se instruksies of die antwoord in wortelvorm of 'n sekere aantal desimale syfers verlang word.
- Kwadraatsvoltooiing word slegs as oplossingsmetode gebruik wanneer indien spesifiek daarvoor gevra word.

2.3.1.2 Gemenge oefeninge

Los die kwadratiese vergelykings op deur van faktorisering, kwadraatsvoltooiing of die kwadratiese formule gebruik te maak:

- Probeer altyd om eers die trinomiaal te faktoriseer en, indien nie moontlik nie, gebruik die formule.
- Los sommige probleme met behulp van kwadraatsvoltooiing op en vergelyk dan jou antwoorde met díe wat met ander metodes verkry is.

1. $24y^2 + 61y - 8 = 0$	2. $-8y^2 - 16y + 42 = 0$	3. $-9y^2 + 24y - 12 = 0$
4. $-5y^2 + 0y + 5 = 0$	5. $-3y^2 + 15y - 12 = 0$	6. $49y^2 + 0y - 25 = 0$
7. $-12y^2 + 66y - 72 = 0$	8. $-40y^2 + 58y - 12 = 0$	9. $-24y^2 + 37y + 72 = 0$
10. $6y^2 + 7y - 24 = 0$	11. $2y^2 - 5y - 3 = 0$	12. $-18y^2 - 55y - 25 = 0$
13. $-25y^2 + 25y - 4 = 0$	14. $-32y^2 + 24y + 8 = 0$	15. $9y^2 - 13y - 10 = 0$
16. $35y^2 - 8y - 3 = 0$	17. $-81y^2 - 99y - 18 = 0$	18. $14y^2 - 81y + 81 = 0$
19. $-4y^2 - 41y - 45 = 0$	20. $16y^2 + 20y - 36 = 0$	21. $42y^2 + 104y + 64 = 0$
22. $9y^2 - 76y + 32 = 0$	23. $-54y^2 + 21y + 3 = 0$	24. $36y^2 + 44y + 8 = 0$
25. $64y^2 + 96y + 36 = 0$	26. $12y^2 - 22y - 14 = 0$	27. $16y^2 + 0y - 81 = 0$
28. $3y^2 + 10y - 48 = 0$	29. $-4y^2 + 8y - 3 = 0$	30. $-5y^2 - 26y + 63 = 0$
31. $x^2 - 70 = 11$	32. $2x^2 - 30 = 2$	33. $x^2 - 16 = 2 - x^2$
34. $2y^2 - 98 = 0$	35. $5y^2 - 10 = 115$	36. $5y^2 - 5 = 19 - y^2$

Table 2.1

2.4 Die vind van die vergelyking[4]

2.4.1 Hoe om 'n Vergelyking te kry as sy Wortels bekend is

Ons het reeds genoem dat die *wortels* van 'n kwadratiese vergelyking die oplossing of antwoorde is wat jy kry deur die kwadratiese vergelyking op te los. Deur terug te werk vanaf die antwoorde, sal jy 'n vergelyking kry.

Exercise 2.4.1: Kry 'n vergelyking wanneer wortels gegee is ***(Solution on p. 47.)***

Kry 'n vergelyking met wortels 13 en -5.

Exercise 2.4.2: Breukwortels ***(Solution on p. 47.)***

Kry 'n vergelyking met wortels $-\frac{3}{2}$ en 4

2.4.1.1 Teorie van Kwadratiese Vergelykings - Gevorderd

Hierdie afdeling is nie in die leerplan nie, maar dit gee mens 'n goeie begrip van party van die oplossings van die kwadratiese vergelykings.

2.4.1.1.1 Wat is die Diskriminant van 'n Kwadratiese Vergelyking?

Beskou 'n algemene kwadratiese funksie in die form $f(x) = ax^2 + bx + c$. Die *diskriminant* word gedefinieer as:

$$\Delta = b^2 - 4ac. \tag{2.23}$$

Hierdie is die uitdrukking onder die vierkantswortel in die formule vir die wortels van die funksie. Ons het reeds gesien dat of die wortels bestaan of nie daarvan afhang of die faktor Δ negatief of positief is nie.

2.4.1.1.2 Die Aard van die Wortels

2.4.1.1.2.1 Real Roots ($\Delta \geq 0$)

Beskou $\Delta \geq 0$ vir 'n kwadratiese funksie in die vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$. In hierdie geval is daar oplossing vir die vergelyking $f(x) = 0$ gegee deur die formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{2.24}$$

As die uitdrukking onder die vierkantswortel nie-negatief is, dan bestaan die vierkantswortel. Hierdie is die wortels van die funksie $f(x)$.

Die verskillende moontlikhede word opgesom in die figuur hieronder.

[4]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39143/1.1/>.

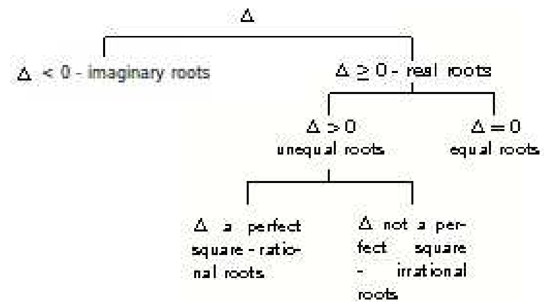

Δ
Δ < 0 - imaginary roots
Δ ≥ 0 - real roots
Δ > 0
unequal roots
Δ = 0
equal roots
Δ a perfect square - rational roots
Δ not a perfect square - irrational roots

Figure 2.3

2.4.1.1.2.2 Gelyke Wortels ($\Delta = 0$)

As $\Delta = 0$, dan is die wortels gelyk, en vanaf die formule word dit gegee deur

$$x = -\frac{b}{2a} \tag{2.25}$$

2.4.1.1.2.3 Ongelyke Wortels ($\Delta > 0$)

Daar sal 2 ongelyke wortels wees as $\Delta > 0$. Die wortels van $f(x)$ is **rationaal** as Δ 'n volmaakte vierkant ('n getal wat die vierkant van 'n rasionale getal is) is. Die rede is dat in hierdie geval $\sqrt{\Delta}$ rasionaal is. Anders, as Δ nie 'n volmaakte vierkant is nie, dan is the wortels **irrasionaal**.

2.4.1.1.2.4 Imaginêre Wortels ($\Delta < 0$)

As $\Delta < 0$, dan bevat die oplossing van $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ die vierkantswortels van 'n negatiewe getal en daarom is daar geen reële oplossings nie. Ons sê daarom dat die wortels van $f(x)$ *imaginêr* is (die grafiek van die funksie $f(x)$ sny nie die x-as nie).

Khan academy video on quadratics - 4

This media object is a Flash object. Please view or download it at
<http://www.youtube.com/v/JBSDQLZtjFo&rel=0&hl=en_US&feature=player_embedded&version=3>

Figure 2.4

2.4.1.1.2.5 Teorie van Kwadrate - gevorderde oefeninge

2.4.1.1.2.5.1 Vanaf ou vraestelle

IEB, Nov. 2001, HG Gegee: $x^2 + bx - 2 + k(x^2 + 3x + 2) = 0 \qquad (k \neq -1)$

a. Wys dat die diskriminant gegee word deur

$$\Delta = k^2 + 6bk + b^2 + 8 \tag{2.26}$$

b. As $b = 0$, bespreek die aard van die wortels van die vergelyking.
c. As $b = 2$, kry die waarde(s) van k waarvoor die wortels gelyk is.

IEB, Nov. 2002, HG Wys dat $k^2x^2 + 2 = kx - x^2$ nie-reële wortels het vir alle reele waardes van k.

IEB, Nov. 2003, HG Die vergelyking $x^2 + 12x = 3kx^2 + 2$ het reële wortels.

a. Kry die grootste heeltallige waarde van k.
b. Kry een rasionale waarde van k waarvoor die bostaande vergelyking rasionale wortels het.

IEB, Nov. 2003, HG In die kwadratiese vergelyking $px^2 + qx + r = 0$ is p, q en r positiewe reële getalle en vorm 'n meetkundige ry. Bespreek die aard van die wortels.

IEB, Nov. 2004, HG Beskou die vergelyking

$$k = \frac{x^2 - 4}{2x - 5} \qquad \text{met } x \neq \frac{5}{2} \tag{2.27}$$

a. Kry 'n waarde van k waarvoor die wortels gelyk is.
b. Kry 'n heelgetal k waarvoor die wortels van die vergelyking rasionaal en ongelyk is.

IEB, Nov. 2005, HG a. Bewys dat die wortels van die vergelyking $x^2-(a+b)\,x+ab-p^2=0$ reëel is vir alle reële waardes van a, b en p.
b. Wanneer sal die wortels van die vergelyking gelyk wees?

IEB, Nov. 2005, HG As b en c slegs die waardes 1, 2 of 3 kan aanneem, bepaal alle pare $(b;\,c)$ sodat $x^2+bx+c=0$ reële wortels het.

2.4.2 Hoofstukoefeninge

1. Los op: $x^2-x-1=0$ (Gee jou antwoord korrek tot twee desimale plekke.)
2. Los op: $16\,(x+1)=x^2\,(x+1)$
3. Los op: $y^2+3+\frac{12}{y^2+3}=7$ (Wenk: Stel $y^2+3=k$. Los eerste vir k op and gebruik die antwoord om y op te los.)
4. Los op vir x: $2x^4-5x^2-12=0$
5. Los op vir x:
   a. $x\,(x-9)+14=0$
   b. $x^2-x=3$ (Wys jou antwoord korrek tot EEN desimale plek.)
   c. $x+2=\frac{6}{x}$ (korrek tot twee desimale plekke)
   d. $\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x-1}=1$
6. Los op vir x deur kwadraatsvoltooiing: $x^2-px-4=0$
7. Die vergelyking $ax^2+bx+c=0$ het wortels$x=\frac{2}{3}$ en $x=-4$. Kry een stel moontlike waardes vir a, b en c.
8. Die twee wortels van die vergelyking $4x^2+px-9=0$ verskil met 5. Bereken die waarde van p.
9. 'n Vergelyking van die vorm $x^2+bx+c=0$ word geskryf op die bord. Saskia en Sven skryf dit verkeerd af. Saskia het 'n fout in die konstante term en kry die oplossings -4 en 2. Sven het 'n fout in die koëffisiënt van x en kry die oplossings 1 en -15. Bepaal die korrekte vergelyking wat op die bord was.
10. Bjorn kom in 'n oorsese handboek af op die volgende formule om die kwadratiese vergelyking $ax^2+bx+c=0$ op te los.

$$x=\frac{2c}{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}} \tag{2.28}$$

   a. Gebruik hierdie formule om die volgende vergelyking op te los:

$$2x^2+x-3=0 \tag{2.29}$$

   b. Los die vergelyking weer op, die keer deur faktorisering, om te sien of die formule werk vir hierdie vergelyking.
   c. Bjorn probeer om hierdie formule af te lei om te bewys dat dit altyd werk, maar sit na 'n paar stappe vas. Hieronder is sy poging:

$$\begin{array}{rcll} ax^2+bx+c &=& 0 & \\ a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2} &=& 0 & \text{Deel deur } x^2 \text{ waar } x?0 \\ \frac{c}{x^2}+\frac{b}{x}+a &=& 0 & \text{Herrangskik} \\ \frac{1}{x^2}+\frac{b}{cx}+\frac{a}{c} &=& 0 & \text{Deel deur } c \text{ waar } c?0 \\ \frac{1}{x^2}+\frac{b}{cx} &=& -\frac{a}{c} & \text{Trek } \frac{a}{c} \text{ af van beide kante} \\ ?\ \frac{1}{x^2}+\frac{b}{cx} &+& ... & \text{Sit vas} \end{array} \tag{2.30}$$

Voltooi sy afleiding.

Solutions to Exercises in Chapter 2

Solution to Exercise 2.1.1 (p. 33)

Step 1. Hierdie vergelyking het geen gemene faktore nie.
Step 2. Die verglyking is in die voorgeskrewe vorm, met $a = 2$, $b = -5$ en $c = -12$.
Step 3. $2x^2 - 5x - 12$ het faktore van die vorm:

$$(2x + s)(x + v) \tag{2.31}$$

met s en v konstantes wat bepaal moet word. Dit word vermenigvuldig om

$$2x^2 + (s + 2v)x + sv \tag{2.32}$$

te gee. Ons sien dat $sv = -12$ en $s + 2v = -5$. Hierdie is 'n stel gelyktydige vergelykings in s en v, dit is maklik om numeries op te los. Al die opsies vir s en v word hieronder oorweeg.

s	v	$s + 2v$
2	-6	-10
-2	6	10
3	-4	-5
-3	4	5
4	-3	-2
-4	3	2
6	-2	2
-6	2	-2

Table 2.2

Ons sien dat die kombinasie van $s = 3$ en $v = -4$ gee vir ons $s + 2v = -5$.
Step 4.

$$(2x + 3)(x - 4) = 0 \tag{2.33}$$

Step 5. Indien twee hakkies vermenigvuldig word en 0 gee, moet een van die hakkies 0 wees, dus

$$2x + 3 = 0 \tag{2.34}$$

of

$$x - 4 = 0 \tag{2.35}$$

Dus, $x = -\frac{3}{2}$ of $x = 4$
Step 6. Die oplossing van $2x^2 - 5x - 12 = 0$ is $x = -\frac{3}{2}$ of $x = 4$.

Solution to Exercise 2.1.2 (p. 33)

Step 1. Verwyder die hakkies en kry al die terme aan een kant van die gelykaanteken.

$$a^2 - 3a - 10 = 0 \tag{2.36}$$

Step 2.

$$(a + 2)(a - 5) = 0 \tag{2.37}$$

Step 3.

$$a + 2 = 0 \tag{2.38}$$

of

$$a - 5 = 0 \tag{2.39}$$

Los die twee lineêre vergelykings op en kontroleer die antwoorde in die oorspronklike vergelyking.

Step 4. Dus, $a = -2$ of $a = 5$

Solution to Exercise 2.1.3 (p. 33)

Step 1.

$$\frac{3b(b+1) + (b+2)(b+1)}{(b+2)(b+1)} = \frac{4(b+2)}{(b+2)(b+1)} \tag{2.40}$$

Step 2. Die noemers is dieselfde, daarom moet die tellers ook dieselfde wees.
Maar $b \neq -2$ en $b \neq -1$

Step 3.

$$\begin{aligned} 3b^2 + 3b + b^2 + 3b + 2 &= 4b + 8 \\ 4b^2 + 2b - 6 &= 0 \\ 2b^2 + b - 3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Step 4.

$$\begin{aligned} (2b+3)(b-1) &= 0 \\ 2b + 3 = 0 \quad of & \quad b - 1 = 0 \\ b = \frac{-3}{2} \quad of & \quad b = 1 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Step 5. Albei oplossing is geldig
Dus, $b = \frac{-3}{2}$ of $b = 1$

Solution to Exercise 2.2.1 (p. 35)

Step 1.

$$x^2 - 10x - 11 = 0 \tag{2.43}$$

Step 2.

$$x^2 - 10x = 11 \tag{2.44}$$

Step 3. Die koëffisiënt van die term x^2 is 1.

Step 4. Die koëffisiënt van die term x is -10. Helfte van die koëffisiënt van die term x sal wees $\frac{(-10)}{2} = -5$ en die kwadraat sal wees $(-5)^2 = 25$. Dus:

$$x^2 - 10x + 25 = 11 + 25 \tag{2.45}$$

Step 5.

$$(x-5)^2 - 36 = 0 \tag{2.46}$$

Step 6.

$$(x-5)^2 - 36 = 0 \tag{2.47}$$

$$[(x-5)+6][(x-5)-6] = 0 \tag{2.48}$$

Step 7.

$$\begin{aligned} [x+1][x-11] &= 0 \\ \therefore x = -1 \quad \text{of} & \quad x = 11 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Solution to Exercise 2.2.2 (p. 35)

Step 1.

$$2x^2 - 8x - 16 = 0 \quad (2.50)$$

Step 2.

$$2x^2 - 8x = 16 \quad (2.51)$$

Step 3. Die koëffisiënt van die term x^2 is 2. Deel dus beide kante deur 2:

$$x^2 - 4x = 8 \quad (2.52)$$

Step 4. Die koëffisiënt van die term x is -4; $\frac{(-4)}{2} = -2$ en $(-2)^2 = 4$. Dus:

$$x^2 - 4x + 4 = 8 + 4 \quad (2.53)$$

Step 5.

$$(x-2)^2 - 12 = 0 \quad (2.54)$$

Step 6.

$$\left[(x-2) + \sqrt{12}\right]\left[(x-2) - \sqrt{12}\right] = 0 \quad (2.55)$$

Step 7.

$$\begin{array}{rcl} \left[x - 2 + \sqrt{12}\right]\left[x - 2 - \sqrt{12}\right] & = & 0 \\ \therefore x = 2 - \sqrt{12} & \text{or} & x = 2 + \sqrt{12} \end{array} \quad (2.56)$$

Step 8. Laat die linkerkant as 'n volkome vierkant geskryf

$$(x-2)^2 = 12 \quad (2.57)$$

Step 9.

$$x - 2 = \pm\sqrt{12} \quad (2.58)$$

Step 10. Dus $x = 2 - \sqrt{12}$ of $x = 2 + \sqrt{12}$
Vergelyk met antwoord in stap 7.

Solution to Exercise 2.3.1 (p. 37)

Step 1. Die uitdrukking kan nie gefaktoriseer word nie. Die algemene kwadratiese formule sal dus gebruik moet word.

Step 2. Vanuit die vergelyking:

$$a = 2 \quad (2.59)$$

$$b = 3 \quad (2.60)$$

$$c = -7 \quad (2.61)$$

Step 3. Skryf altyd eers die formule neer en stel daarna die waardes van a, b en c in.

$$\begin{array}{rcl} x & = & \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ & = & \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)} \\ & = & \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{4} \\ & = & \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{4} \end{array} \quad (2.62)$$

Step 4. Die twee wortels van $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$ is $x = \frac{-3+\sqrt{65}}{4}$ en $\frac{-3-\sqrt{65}}{4}$.

Solution to Exercise 2.3.2 (p. 37)

Step 1. Die uitdrukking kan nie gefaktoriseer word nie. Die algemene kwadratiese formule sal dus gebruik moet word.

Step 2. Vanuit die vergelyking:

$$a = 1 \quad (2.63)$$

$$b = -5 \quad (2.64)$$

$$c = 8 \quad (2.65)$$

Step 3.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(8)}}{2(1)} \\ &= \frac{5\pm\sqrt{-7}}{2} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Step 4. Aangesien die uitdrukking onder die vierkantswortel negatief is sal hierdie oplossings nie-reëel wees ($\sqrt{-7}$ is nie 'n reële getal nie). Daarom is daar geen reële oplossings vir die kwadratiese vergelyking $x^2 - 5x + 8 = 0$ nie. Dit beteken dat die grafiek van die funksie $f(x) = x^2 - 5x + 8$ geen x-afsnitte het nie, maar dat die hele grafiek bokant die x-as lê.

Solution to Exercise 2.4.1 (p. 39)

Step 1. Die stap voor die oplossings gegee word sou wees:

$$(x - 13)(x + 5) = 0 \quad (2.67)$$

Let op dat die tekens in die hakies die teenoorgestelde is as die van die gegewe wortels.

Step 2.

$$x^2 - 8x - 65 = 0 \quad (2.68)$$

Daar is natuurlik ander moontlike vergelykings ook wat gekry word as elke term aan elke kant van die *gelyk aan teken* met 'n konstante vermenigvuldig word.

Solution to Exercise 2.4.2 (p. 39)

Step 1. Let op dat as $x = -\frac{3}{2}$ dan $2x + 3 = 0$
Daarom sal die twee hakies wees:

$$(2x + 3)(x - 4) = 0 \quad (2.69)$$

Step 2. Die vergelyking is:

$$2x^2 - 5x - 12 = 0 \quad (2.70)$$

Chapter 3

Oplossing van Kwadratiese Ongelykhede[1]

3.1 Oplossing van Kwadratiese Ongelykhede - Graad 11

3.2 Inleiding

Nou dat jy weet hoe om kwadratiese vergelykings op te los, is jy gereed om te leer hoe om kwadratiese *ongelykhede* op te los.

3.3 Kwadratiese Ongelykhede

'n *Kwadratiese ongelykheid* is ongelykheid van die vorm

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &> 0 \\ ax^2 + bx + c &\geq 0 \\ ax^2 + bx + c &< 0 \\ ax^2 + bx + c &\leq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Om 'n kwadratiese ongelykheid op te los is dieselfde as om uit te werk watter dele van die grafiek bo of onder die x-as is.

Exercise 3.1: Kwadratiese Ongelykhede ***(Solution on p. 51.)***
Los die ongelykheid $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$ op en interpreteer die oplossing grafies.

Exercise 3.2: Oplossing van Kwadratiese Ongelykhede ***(Solution on p. 51.)***
Vind al die oplossings van die ongelykheid $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

Exercise 3.3: Oplossing van Kwadratiese Ongelykhede ***(Solution on p. 52.)***
Los die kwadratiese ongelykheid $-x^2 - 3x + 5 > 0$ op.

Wanneer die veranderlike van die ongelykheid in die noemer eerder as die teller is, is 'n ander benadering nodig.

Exercise 3.4: Nie-lineêre ongelykhede met die veranderlike in die noemer ***(Solution on p. 54.)***
Los op: $\frac{2}{x+3} \leq \frac{1}{x-3}$

[1] This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m38123/1.1/>.

3.4 Hoofstuksoefeninge

Los die volgende ongelykhede op en wys jou antwoord of 'n getallelyn.

1. Los op: $x^2 - x < 12$.
2. Los op: $3x^2 > -x + 4$
3. Los op: $y^2 < -y - 2$
4. Los op: $-t^2 + 2t > -3$
5. Los op: $s^2 - 4s > -6$
6. Los op: $0 \geq 7x^2 - x + 8$
7. Los op: $0 \geq -4x^2 - x$
8. Los op: $0 \geq 6x^2$
9. Los op: $2x^2 + x + 6 \leq 0$
10. Los op: $\frac{x}{x-3} < 2$ en $x \neq 3$.
11. Los op: $\frac{4}{x-3} \leq 1$.
12. Los op: $\frac{4}{(x-3)^2} < 1$.
13. Los op: $\frac{2x-2}{x-3} > 3$
14. Los op: $\frac{-3}{(x-3)(x+1)} < 0$
15. Los op: $(2x-3)^2 < 4$
16. Los op: $2x \leq \frac{15-x}{x}$
17. Los op: $\frac{x^2+3}{3x-2} \leq 0$
18. Los op: $x - 2 \geq \frac{3}{x}$
19. Los op: $\frac{x^2+3x-4}{5+x^4} \leq 0$
20. Bepaal alle reële oplossings: $\frac{x-2}{3-x} \geq 1$

Solutions to Exercises in Chapter 3

Solution to Exercise 3.1 (p. 49)

Step 1. Laat $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$. Faktorisering van die funksie lewer $f(x) = (2x-1)^2$.
Step 2.

$$(2x-1)^2 \leq 0 \tag{3.2}$$

Step 3. $f(x) = 0$ slegs as $x = \frac{1}{2}$.
Step 4. Dit beteken dat die grafiek van $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ die x-as raak by $x = \frac{1}{2}$, maar daar is geen areas waar die grafiek onder die x-as is nie.

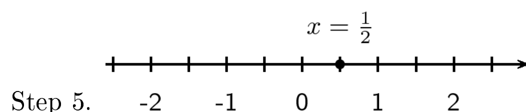
Step 5. 

Figure 3.1

Solution to Exercise 3.2 (p. 49)

Step 1. Die faktore van $x^2 - 5x + 6$ is $(x-3)(x-2)$.
Step 2.

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &\geq 0 \\ (x-3)(x-2) &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Step 3. Ons moet bepaal watter waardes van x die ongelykheid bevredig. Vanaf die faktorisering is daar vyf areas om na te kyk.

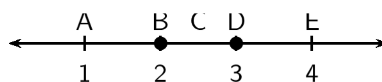


Figure 3.2

Step 4. Laat $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Kies 'n punt in elkeen van areas en evalueer die funksie.

		$f(x)$	teken van $f(x)$
Area A	$x < 2$	$f(1) = 2$	$+$
Area B	$x = 2$	$f(2) = 0$	$+$
Area C	$2 < x < 3$	$f(2,5) = -2,5$	-
Area D	$x = 3$	$f(3) = 0$	$+$
Area E	$x > 3$	$f(4) = 2$	$+$

Table 3.1

Ons kan sien dat die funksie positief is vir $x \leq 2$ en $x \geq 3$.

Step 5. Ons sien dat $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ waar is vir $x \leq 2$ en $x \geq 3$.

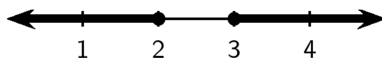


Figure 3.3

Solution to Exercise 3.3 (p. 49)

Step 1. Laat $f(x) = -x^2 - 3x + 5$. $f(x)$ kan nie deur inspeksie gefaktoriseer word nie, dus gebruik ons die formule vir kwadratiese vergelykings. Die x-afsnitte is die oplossings van die kwadratiese funksie.

$$\begin{aligned} -x^2 - 3x + 5 &= 0 \\ x^2 + 3x - 5 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2} \\ x_1 &= \frac{-3 - \sqrt{29}}{2} \\ x_2 &= \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Step 2. Ons moet bepaal watter waardes van x die ongelykheid bevredig. Vanaf die antwoorde het ons vyf areas om te ondersoek.

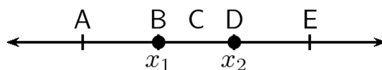


Figure 3.4

Step 3. Daar is nog 'n manier om die teken van die funksie te bepaal in verskillende areas: deur 'n rowwe skets van die grafiek van die funksie te maak. Ons weet dat die wortels van die funksie ooreenstem met die x-afsnitte van die grafiek. Laat $g(x) = -x^2 - 3x + 5$. Ons kan sien dat die die funksie 'n parabool is met 'n maksimum draaipunt en wat die x-as by x_1 en x_2 sny.

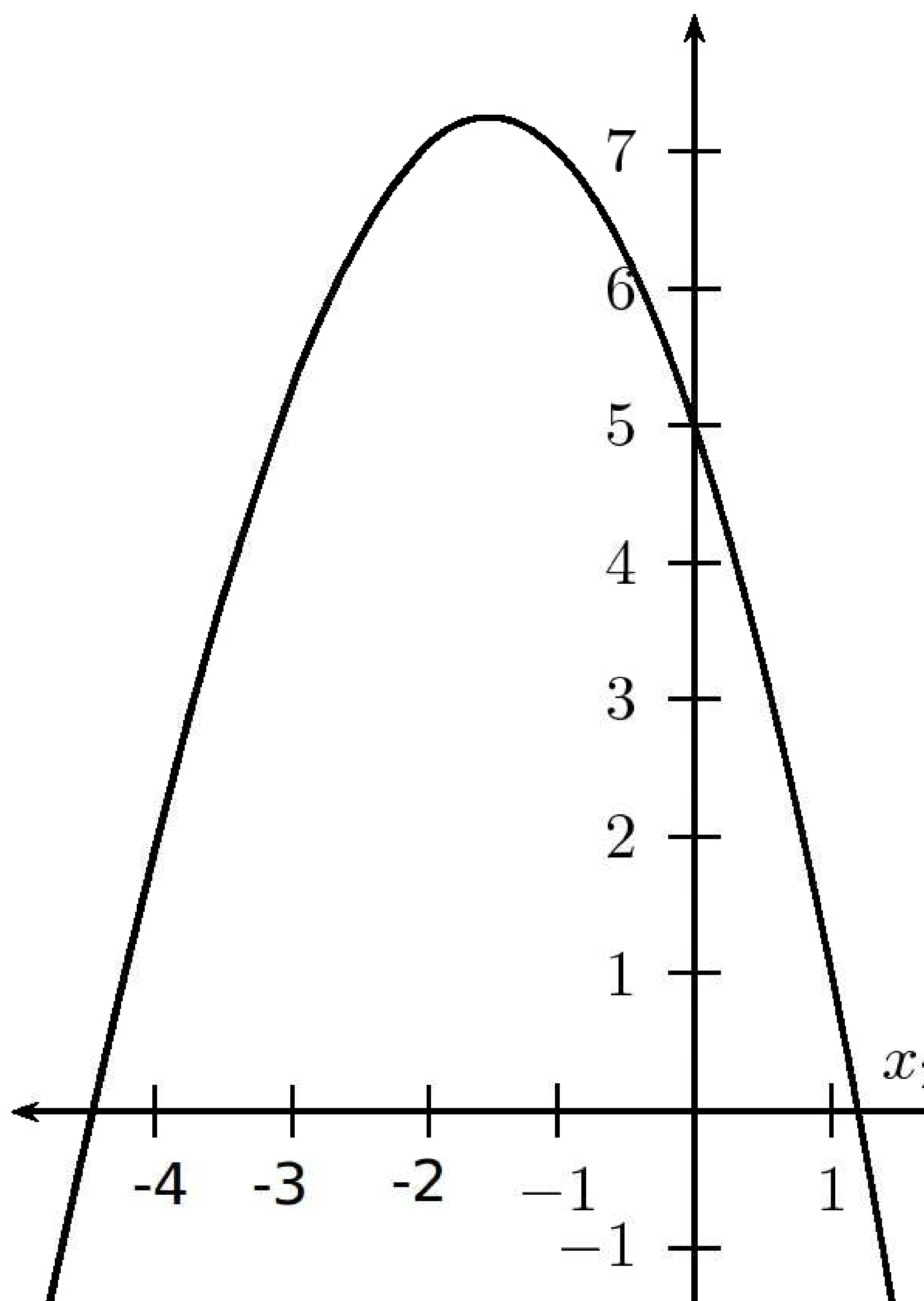


Figure 3.5

Dit is duidelik dat $g(x) > 0$ vir $x_1 < x < x_2$

Step 4. $-x^2 - 3x + 5 > 0$ vir $x_1 < x < x_2$



Figure 3.6

Solution to Exercise 3.4 (p. 49)

Step 1.

$$\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-3} \leq 0 \tag{3.5}$$

Step 2.

$$\begin{array}{r} \frac{2(x-3)-(x+3)}{(x+3)(x-3)} \leq 0 \\ \frac{x-9}{(x+3)(x-3)} \leq 0 \end{array} \tag{3.6}$$

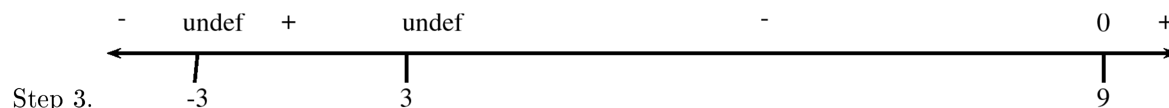
Step 3. 

Figure 3.7

Ons sien dat die uitdrukking negatief is vir $x < -3$ en $3 < x \leq 9$.

Step 4.

$$x < -3 \quad of \quad 3 < x \leq 9 \tag{3.7}$$

Chapter 4

Gelyktydige vergelyking

4.1 Algebraïese oplossing[1]

4.1.1 Algebraïese oplossings

Die oplos van gelyktydige vergelykings in algebra is deur middel van substitusie

Byvoorbeeld die oplossing van

$$\begin{aligned} y - 2x = -4 \\ x^2 + y = 4 \end{aligned} \qquad (4.1)$$

is:

$$\begin{array}{rcl} y & = & 2x - 4 \quad \text{in tweede vergelyking} \\ x^2 + (2x - 4) & = & 4 \\ x^2 + 2x - 8 & = & 0 \\ \text{Faktoriseer :} \quad (x + 4)(x - 2) & = & 0 \\ \therefore \text{Die2oplossings vir x is :} \ x = -4 \text{en} x = 2 & & \end{array} \qquad (4.2)$$

Die ooreenstemmende oplossings vir y word verkry deur substitusie van die x-waardes in die eerste vergelyking

$$\begin{array}{rcl} y = 2(-4) - 4 & = & -12 \text{ vir } x = -4 \\ \text{en :} \ y = 2(2) - 4 & = & 0 \text{ vir } x = 2 \end{array} \qquad (4.3)$$

Soos verwag, is hierdie oplossings identies aan die waardes verkry deur die grafiese oplossing

Oefening 4.1.1: Gelyktydige vergelykings ***(Solution on p. 59.)***

Los op algebraïes:

$$\begin{array}{rcl} y - x^2 + 9 & = & 0 \\ y + 3x - 9 & = & 0 \end{array} \qquad (4.4)$$

[1] This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39151/1.1/>.

4.1.1.1 Algebraïese oplossing

Los op die volgende probleme van algebraïese vergelykings. Waar toepaslik, los jou antwoord in wortelvorm.

1. $a+b=5$	$a-b^2+3b-5=0$
2. $a-b+1=0$	$a-b^2+5b-6=0$
3. $a-\frac{(2b+2)}{4}=0$	$a-2b^2+3b+5=0$
4. $a+2b-4=0$	$a-2b^2-5b+3=0$
5. $a-2+3b=0$	$a-9+b^2=0$
6. $a-b-5=0$	$a-b^2=0$
7. $a-b-4=0$	$a+2b^2-12=0$
8. $a+b-9=0$	$a+b^2-18=0$
9. $a-3b+5=0$	$a+b^2-4b=0$
10. $a+b-5=0$	$a-b^2+1=0$
11. $a-2b-3=0$	$a-3b^2+4=0$
12. $a-2b=0$	$a-b^2-2b+3=0$
13.$a-3b=0$	$a-b^2+4=0$
14. $a-2b-10=0$	$a-b^2-5b=0$
15. $a-3b-1=0$	$a-2b^2-b+3=0$
16. $a-3b+1=0$	$a-b^2=0$
17. $a+6b-5=0$	$a-b^2-8=0$
18.$a-2b+1=0$	$a-2b^2-12b+4=0$
19. $2a+b-2=0$	$8a+b^2-8=0$
20. $a+4b-19=0$	$8a+5b^2-101=0$
21. $a+4b-18=0$	$2a+5b^2-57=0$

Table 4.1

4.2 Grafiese oplossing[2]

4.2.1 Inleiding

In Graad 10 het jy geleer hoe om stelle van gelyktydige vergelykings op te los. Hierdie vergelykings was tot dusver beide lineêre (dws die hoogste krag is gelyk aan 1). In hierdie hoofstuk sal jy leer hoe om stelle van gelyktydige vergelykings op te los waar een lineêr is en een kwadratiese is. Soos in graad 10, sal die oplossing algebraïes en grafies opgelos word.

Die enigste verskil tussen 'n stelsel van lineêre gelyktydige vergelykings en'n stelsel van gelyktydige vergelykings met 'n lineêre en 'n kwadratiese vergelyking, is dat die tweede stelsel sal op die meeste twee oplossings hê.

[2]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39149/1.1/>.

'n Voorbeeld van 'n stelsel van gelyktydige vergelykings met een lineêre vergelyking en een kwadratiese vergelyking is:

$$\begin{aligned} y - 2x &= -4 \\ x^2 + y &= 4 \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.2.2 Grafiese Oplossing

Die metode om die oplossing vir 'n lineêre en 'n kwadratiese vergelyking grafies te vind is identies aan 'n stelsels van lineêre gelyktydige vergelykings.

4.2.2.1 Metode: Grafiese oplossing vir 'n stelsel van gelyktydige vergelykings met 'n lineêre en 'n kwadratiese vergelyking

1. Maak y die onderwerp van elke vergelyking.
2. Teken die grafieke van elkeen van die vergelykings hierbo.
3. Die oplossing van die stel van gelyktydige vergelykings word gegee deur die kruising van die twee grafieke.

Deur , y die onderwerp van elke vergelyking te maak, kry jy:

$$\begin{aligned} y &= 2x - 4 \\ y &= 4 - x^2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Deur die grafiek van elke vergelyking te plot, kry jy 'n reguit lyn vir die eerste vergelyking en 'n parabool vir die tweede vergelyking.

Image not finished

Figure 4.1

Die parabool en die reguit lyn sny op twee punte: (2,0) en (-4,-12). Dus, die oplossing van die stel van vergelykings in (4.5) is $x = 2, y = 0$ en $x = -4, y = 12$

Exercise 4.2.1: Gelyktydige Oplossings ***(Solution on p. 59.)***

Los grafies op:

$$\begin{aligned} y - x^2 + 9 &= 0 \\ y + 3x - 9 &= 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.2.2.1.1 Grafiese Oplossing

Los die volgende stelsels van vergelykings grafies op. Indien van pas, laat jou antwoord in wortel vorm.

1. $b^2 - 1 - a = 0, a + b - 5 = 0$
2. $x + y - 10 = 0, x^2 - 2 - y = 0$
3. $6 - 4x - y = 0, 12 - 2x^2 - y = 0$
4. $x + 2y - 14 = 0, x^2 + 2 - y = 0$
5. $2x + 1 - y = 0, 25 - 3x - x^2 - y = 0$

Solutions to Exercises in Chapter 4

Oplossing to Exercise 4.1.1 (p. 55)

Step 1.

$$\begin{aligned} y + 3x - 9 &= 0 \\ y &= -3x + 9 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Step 2.

$$\begin{aligned} (-3x + 9) - x^2 + 9 &= 0 \\ x^2 + 3x - 18 &= 0 \\ \text{Faktoriseer}: \ (x + 6)(x - 3) &= 0 \\ \therefore \ \text{die 2 oplossings vir x is}: \ x = -6 \text{ and } x = 3 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Step 3.

$$\begin{aligned} y = -3(-6) + 9 &= 27 \quad \text{vir } x = -6 \\ \text{en}: \quad y = -3(3) + 9 &= 0 \quad \text{vir } x = 3 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Step 4. Die eerste waarde is $x = -6$ en $y = 27$. Die tweede waarde is $x = 3$ en $y = 0$.

Solution to Exercise 4.2.1 (p. 57)

Step 1. Vir die eerste vergelyking:

$$\begin{aligned} y - x^2 + 9 &= 0 \\ y &= x^2 - 9 \end{aligned} \tag{4.11}$$

en vir die tweede vergelyking:

$$\begin{aligned} y + 3x - 9 &= 0 \\ y &= -3x + 9 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Step 2. **Image not finished**

Figure 4.2

Step 3. Die grafieke sny by $(-6, 27)$ en by $(3, 0)$.
Step 4. Die eerste oplossing is $x = -6$ en $y = 27$. Die tweede oplossings is $x = 3$ en $y = 0$.

Chapter 5

Hiperboliese funksies en grafieke[1]

5.1 Inleiding

In graag 10 het jy verskillende grafieke se vorms bestudeer. In hierdie hoofstuk sal jy leer van grafieke van funksies.

5.2 Funksies in die Vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$

Hierdie vorm van die hiperboliese funksie is effens meer kompleks as die vorms wat in graad 10 teëgekom is.

Image not finished

Figure 5.1: Algemene vorm en posisie van die grafiek van 'n funksie in die vorm $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$. Die asimptote word aangedui as stippellyne.

5.2.1 Ondersoek: Funksies van die Vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$

1. Op dieselfde assestelsel, teken die volgende grafieke:
   a. $a(x) = \frac{-2}{x+1} + 1$
   b. $b(x) = \frac{-1}{x+1} + 1$
   c. $c(x) = \frac{0}{x+1} + 1$
   d. $d(x) = \frac{1}{x+1} + 1$
   e. $e(x) = \frac{2}{x+1} + 1$

   Gebruik die resultate om die effek af te lei van Use your results to deduce the effect of a.
2. Op dieselfde assestelsel, teken die volgende grafieke:
   a. $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$
   b. $g(x) = \frac{1}{x-1} + 1$

[1]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39220/1.1/>.

c. $h(x) = \frac{1}{x+0} + 1$
d. $j(x) = \frac{1}{x+1} + 1$
e. $k(x) = \frac{1}{x+2} + 1$

Gebruik jou resultate om die effekte af te lei van p.

3. Deur die algemene metode van die bogenoemde aktiwiteite, kies jou eie waardes van a en p om 5 verskillende grafieke te teken van $y = \frac{a}{x+p} + q$ om die effekte van q af te lei.

Jy behoort te gevind het dat die teken van a beïnvloed of die grafiek in die eerste en derde of in die tweede en vierde kwadrant van die Cartesiese vlak is.

Jy sou ook gevind het dat die waarde vand p beïnvloed of die x-afsnit negatief ($p > 0$) of positief($p < 0$) is.

Jy behoort ook te gevind het dat die waarde van q beïnvloed of die grafiek bo die$x$-as ($q > 0$) of onder die x-as ($q < 0$) lê.

Hierdie verskillende eienskappe word opgesom in Table 5.1. Die asse van simmetrie vir elke grafiek word vertoon as 'n stippellyn.

	$p < 0$
	$a > 0$
$q > 0$	**Figure 5.2**

continued on next page

$q < 0$	Figure 5.6

Table 5.1: Tabel wat die algemene vorms en posisies opsom van funksies in die vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$. Die asse van simmetrie word vertoon as stippellyne.

5.2.2 Gebied en Terrein

Vir $y = \frac{a}{x+p} + q$, is die funksie ongedefinieerd vir $x = -p$. Die gebied is daarom $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -p\}$.

Ons sien dat $y = \frac{a}{x+p} + q$ kan herskryf word as:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x+p} + q \\ y - q &= \frac{a}{x+p} \\ \text{As } x \neq -p \text{ dan is : } \quad (y-q)(x+p) &= a \\ x + p &= \frac{a}{y-q} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dit wys dat die funksie ongedefinieerd is by $y = q$. Die terrein van $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$ is daarom $\{f(x) : f(x) \in R, f(x) \neq q$.

Byvoorbeeld, die gebied van $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$ is $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$ want $g(x)$ is ongedefinieerd by $x = -1$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{x+1} + 2 \\ (y-2) &= \frac{2}{x+1} \\ (y-2)(x+1) &= 2 \\ (x+1) &= \frac{2}{y-2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ons kan sien dat $g(x)$ is ongedefinieerd by $y = 2$. Daarom is die gebied $\{g(x) : g(x) \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)\}$.

5.2.2.1 Gebied en Terrein

1. Bepaal die terrein van $y = \frac{1}{x} + 1$.
2. Gegewe:$f(x) = \frac{8}{x-8} + 4$. Write down the domain of f.
3. Bepaal die gebied van $y = -\frac{8}{x+1} + 3$

5.2.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm, $y = \frac{a}{x+p} + q$, word die afsnitte met die x en y assebereken deur $x = 0$ te stel vir die y-afsnit en deur $y = 0$ te stel vir die x-afsnit.

The y-intercept is calculated as follows:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x+p} + q \\ y_{int} &= \frac{a}{0+p} + q \\ &= \frac{a}{p} + q \end{aligned} \tag{5.3}$$

Byvoorbeeld, die y-afsnit van $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$ word verkry deur $x = 0$ te stel, wat lewer:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{x+1} + 2 \\ y_{int} &= \frac{2}{0+1} + 2 \\ &= \frac{2}{1} + 2 \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Die x-afsnitte word bereken deur $y = 0$ te stel as volg:

$$y = \frac{a}{x+p} + q$$
$$0$$
$$=$$
$$\frac{a}{x_{int}+p} + q$$
$$\frac{a}{x_{int}+p}$$
$$=$$
$$-q$$
$$a \tag{5.5}$$
$$=$$
$$-q\left(x_{int} + p\right)$$
$$x_{int} + p$$
$$=$$
$$\frac{a}{-q}$$
$$x_{int}$$
$$=$$
$$\frac{a}{-q} - p$$

Byvoorbeeld, die x-afsnit van $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$ word gegee deur $x = 0$ te stel om die volgende te kry:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{x+1} + 2 \\ 0 &= \frac{2}{x_{int}+1} + 2 \\ -2 &= \frac{2}{x_{int}+1} \\ -2(x_{int}+1) &= 2 \\ x_{int}+1 &= \frac{2}{-2} \\ x_{int} &= -1-1 \\ x_{int} &= -2 \end{aligned} \tag{5.6}$$

5.2.3.1 Afsnitte

1. Gegewe:$h(x) = \frac{1}{x+4} - 2$. Bepaal die koördinate van die afsnitte van h met die x- en y-asse.
2. Bepaal die x-afsnit van die grafiek van $y = \frac{5}{x} + 2$. Hoekom is daar geen y-afsnit vir hierdie funksie nie?

5.2.4 Asimptote

Daar is twee asimptote vir funksies van die vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$. Hulle word bepaal deur die gebied en terrein te ondersoek.

Ons het gesien dat die funksie ongedefinieerd was by $x = -p$ en vir $y = q$. Daarom is die asimptote $x = -p$ en $y = q$.

Byvoorbeeld, die gebied van $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$ is $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$ because $g(x)$ is ongedefinieerd by $x = -1$. Ons sien ook dat $g(x)$ is ongedefinieerd by $y = 2$. Daarom is die terrein $\{g(x) : g(x) \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)\}$.

Hieruit kan ons aflei dat die asimptote lê by $x = -1$ en $y = 2$.

5.2.4.1 Asimptote

1. Gegewe:$h(x) = \frac{1}{x+4} - 2$. Bepaal die vergelykings van die asimptote van h.
2. Skryf die vergelyking neer van die vertikale asimptoot van die funksie $y = \frac{1}{x-1}$.

5.2.5 Teken Grafieke van die Vorm$f(x) = \frac{a}{x+p} + q$

Ten einde grafieke te teken van funksies van die vorm, $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$, moet ons vier eienskappebepaal met berekeninge:

1. gebied en terrein
2. asimptote
3. y-afsnit
4. x-afsnit

Byvoorbeeld, teken die grafiek van $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$. Dui die afsnitte en asimptote aan.

Ons het bepaal dat die gebied is $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$ en die terrein is $\{g(x) : g(x) \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)\}$. Daarom is die asimptote by $x = -1$ en $y = 2$.

Die y-intercept is $y_{int} = 4$ en die x-afsnit is $x_{int} = -2$.

Image not finished

Figure 5.10: Grafiek van $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$.

5.2.5.1 Grafieke

1. Teken die grafiek van $y = \frac{1}{x} + 2$. Dui die horisontale asimptoot aan.
2. Gegewe:$h(x) = \frac{1}{x+4} - 2$. Teken die grafiek van h en dui duidelik die asimptote en ALLE afsnitte met die asse.
3. Teken die grafiek van $y = \frac{1}{x}$ en $y = -\frac{8}{x+1} + 3$ op die selfdeassestelsel.
4. Teken die grafiek van $y = \frac{5}{x-2{,}5} + 2$. Verduidelik jou metode.
5. Teken die grafiek van die funksie gedefinieer deur $y = \frac{8}{x-8} + 4$. Dui die asimptote en die afsnitte met die asse aan.

5.3 Einde van die Hoofstuk Oefeninge

1. Teken die grafeik van die hiperbool gedefinieer deur $y = \frac{2}{x}$ vir $-4 \leq x \leq 4$. Veronderstel die hiperbool word geskuif met 3 eenhede na regs en 1 eenheid af. Wat is die nuwe vergelyking nou?
2. Gebaseer op die grafiek van $y = \frac{1}{x}$, bepaal die vergelyking van grafiek met asimptote $y = 2$ en $x = 1$ wat deur die punt (2; 3) gaan.

Chapter 6

Eksponensiële funksies en grafieke[1]

6.1 Inleiding

In Graad 10 het jy grafieke van baie verskillende vorms bestudeer . In hierdie hoofstuk sal jy 'n bietjie meer leer oor die grafieke van eksponensiële funksies.

6.2 Funksies van die Vorm $y = ab^{(x+p)} + q$ for $b > 0$

Hierdie vorm van die eksponensiële funksie is 'n bietjie meer kompleks dan die vorm wat in Graad 10 bestudeer was.

Image not finished

Figure 6.1: Algemene vorm en posisie van die grafiek van 'n funksie van die vorm $f(x) = ab^{(x+p)} + q$.

6.2.1 Ondersoek : Funksies van die Vorm $y = ab^{(x+p)} + q$

1. Op dieselfde assestelsel met $-5 \leq x \leq 3$ en $-35 \leq y \leq 35$ steek die volgende grafieke af:
   a. $f(x) = -2 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
   b. $g(x) = -1 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
   c. $h(x) = 0 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
   d. $j(x) = 1 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
   e. $k(x) = 2 \cdot 2^{(x+1)} + 1$

   Gebruik jou resultate om te verstaan wat gebeur wanneer jy die waarde verander van a. Jy sal vind dat die waarde van a beïnvloed of die grafiek opwaarts buig ($a > 0$) of afwaarts buig ($a < 0$). Jy sal ook vind dat 'n groter waarde van$a$ (wanneer a positief is) sal die grafiek opwaarts uitrek. Maar wanneer a negatief is, sal 'n laer waarde van a (soos -2 in plaas van -1) die grafiek afwaarts uitrek. Ten slotte, let daarop dat wanneer $a = 0$ is die grafiek 'n eenvoudige horisontale lyn. Dit is waarom ons $a \neq 0$ stel in die oorspronklike definisies van hierdie funksies.

[1] This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39264/1.1/>.

2. Op dieselfde assestelsel met $-3 \leq x \leq 3$ en $-5 \leq y \leq 20$, steek die volgende grafieke af:
   a. $f(x) = 1 \cdot 2^{(x+1)} - 2$
   b. $g(x) = 1 \cdot 2^{(x+1)} - 1$
   c. $h(x) = 1 \cdot 2^{(x+1)} + 0$
   d. $j(x) = 1 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
   e. $k(x) = 1 \cdot 2^{(x+1)} + 2$

   Gebruik jou resultate om te verstaan wat gebeur wanneer jy die waarde verander van q. Jy sal vind dat wanneer q toeneem, word die hele grafiek opwaarts verskuif. Wanneer q afneem (moontlik ook negatief word), sal die grafiek afwaarts verskuif.
3. Op dieselfde assestelsel met $-5 \leq x \leq 3$ en $-35 \leq y \leq 35$, steek die volgende grafieke af:
   a. $f(x) = -2 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
   b. $g(x) = -1 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
   c. $h(x) = 0 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
   d. $j(x) = 1 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
   e. $k(x) = 2 \cdot 2^{(x+1)} + 1$

   Gebruik u resultate om te verstaan wat gebeur wanneer jy die waarde verander van a. Jy sal vind dat die waarde van a beïnvloed of die grafiek opwaarts buig($a > 0$)of afwaarts buig ($a < 0$). Jy sal ook vind dat 'n groter waarde van a (wanneer a positief is) sal die grafiek opwaarts uitrek.Maar wanneer a negatief is, sal 'n laer waarde van a (soos -2 in plaas van -1)die grafiek afwaarts uitrek. Ten slotte let ons op dat wanneer $a = 0$ is die grafiek eenvoudige 'n horisontale lyn. Dit is waarom ons $a \neq 0$ stel in die oorspronklike definisies van hierdie funksies.
4. Na aanleiding van die algemene metode van die bogenoemde aktiwiteite, kies jou eie waardes vir a en q om 5 grafieke af te steek van $y = ab^{(x+p)} + q$ op dieselfde assestelsel (kies jou eie perke vir x en y sorgvuldig). Maak seker dat jy dieselfde waardes gebruik vir a, b en q vir elke grafiek, en verskillende waardes vir p. Gebruik jou resultate om te verstaan wat die uitwerking is van 'n veranderende waarde van p.

Hierdie verskillende eienskappe word opgesom in Table 6.1.

	$p < 0$
	$a > 0$
$q > 0$	Figure 6.2

continued on next page

$q<0$	Figure 6.6

Table 6.1: Tabel opsomming van algemene vorms en posisies van die funksies van die vorm $y=ab^{(x+p)}+q$.

6.2.2 Gebied en Terrein

Vir $y=ab^{(x+p)}+q$,word die funksie gedefinieer vir alle reële waardes van x. Daarvoor is die gebied $\{x:x\in\mathbb{R}\}$.

Die terrein van $y=ab^{(x+p)}+q$ is afhanklik van die teken van a.

As $a>0$ dan is:

$$\begin{aligned} b^{(x+p)} &> 0 \\ a\cdot b^{(x+p)} &> 0 \\ a\cdot b^{(x+p)}+q &> q \\ f(x) &> q \end{aligned} \tag{6.1}$$

Daarom as $a>0$, dan is die terrein $\{f(x):f(x)\in[q,\infty)\}$. Met ander woorde $f(x)$ ken enige reële getal groter as q wees.

As $a<0$ dan is:

$$\begin{aligned} b^{(x+p)} &> 0 \\ a\cdot b^{(x+p)} &< 0 \\ a\cdot b^{(x+p)}+q &< q \\ f(x) &< q \end{aligned} \tag{6.2}$$

Daarvoor as $a<0$, dan is die terrein $(-\infty,q)$, betekende dat $f(x)$ kan enige reële getal wees kleiner as q. Gelykerwys, kan 'n mens skryf dat die terrein is $\{y\in\mathbb{R}:y<q\}$.

Byvoorbeeld die gebied van $g(x)=3\cdot 2^{x+1}+2$ is $\{x:x\in\mathbb{R}\}$. Vir die terrein,

$$\begin{aligned} 2^{x+1} &> 0 \\ 3\cdot 2^{x+1} &> 0 \\ 3\cdot 2^{x+1}+2 &> 2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Daarom is die terrein $\{g(x):g(x)\in[2,\infty)\}$.

6.2.2.1 Gebied en Terrein

1. Gee die gebied van $y = 3^x$.
2. Wat is die gebied en terrein van $f(x) = 2^x$?
3. Bepaal die gebied en terrein van $y = (1,5)^{x+3}$.

6.2.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm, $y = ab^{(x+p)} + q$, word die afsnitte met die x- en y-as bereken deur $x = 0$ te stel vir die y-afsnit en deur $y = 0$ te stel vir die x-afsnit.

Die y-afsnit word soos volg bereken:

$$\begin{aligned} y &= ab^{(x+p)} + q \\ y_{int} &= ab^{(0+p)} + q \\ &= ab^p + q \end{aligned} \tag{6.4}$$

Byvoorbeeld, die y-afsnit van $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1} + 2$ word verkry deur $x = 0$ te stel om te gee:

$$\begin{aligned} y &= 3 \cdot 2^{x+1} + 2 \\ y_{int} &= 3 \cdot 2^{0+1} + 2 \\ &= 3 \cdot 2^1 + 2 \\ &= 3 \cdot 2 + 2 \\ &= 8 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Die x-afsnitte word bereken deur $y = 0$ te stel soos volg:

$$\begin{aligned} y &= ab^{(x+p)} + q \\ 0 &= ab^{(x_{int}+p)} + q \\ ab^{(x_{int}+p)} &= -q \\ b^{(x_{int}+p)} &= -\frac{q}{a} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Omdat $b > 0$ (dit is 'n vereiste in die oorspronklike definisie) en 'n positiewe getal verhef tot enige mag is altyd positief, sal die laaste vergelyking hierbo alleenlik 'n reële oplossing hê as of $a < 0$ of $q < 0$ (maar nie beide nie). Bykomend moet a nie gelyk wees aan nul nie vir deling om geldig te wees. Indien hierdie voorwaardes nie bevredig word nie, sal die grafiek van die funksie van die vorm $y = ab^{(x+p)} + q$ geen x-afsnitte hê nie.

Byvoorbeeld, die x-afsnit van $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1} + 2$ word gegee deur $y = 0$ te stel om te gee:

$$\begin{aligned} y &= 3 \cdot 2^{x+1} + 2 \\ 0 &= 3 \cdot 2^{x_{int}+1} + 2 \\ -2 &= 3 \cdot 2^{x_{int}+1} \\ 2^{x_{int}+1} &= \frac{-2}{2} \end{aligned} \tag{6.7}$$

wat geen reële oplossing lewer nie. Daarom het die grafiek van $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1} + 2$ geen x-afsnit nie. Jy sal opmerk dat om $g(x)$ te bereken vir enige waarde van x ,lewer altyd 'n positiewe getal, en dit beteken dat y nooit nul sal wees nie en dus sal die grafiek nooit die x-as sny nie.

6.2.3.1 Intercepts

1. Gee die y-afsnit van die grafiek van $y = b^x + 2$.
2. Gee die x- en y-afsnitte van die grafiek van$y = \frac{1}{2}(1,5)^{x+3} - 0,75$.

6.2.4 Asimptote

Funksies van die vorm $y = ab^{(x+p)} + q$het altyd presies een horisontale asimptoot.

Wanneer ons die terrein van hierdie funksies ondersoek, sien ons dat ons altyd of $y < q$ of $y > q$ verkry vir alle inset waardes van x. Daarom is die lyn $y = q$ 'n asimptoot.

Byvoorbeeld , ons het vroeër opgelet dat die terrein van $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1} + 2$ is $(2, \infty)$ omdat $g(x)$ altyd groter as 2 is.Maar die waarde van $g(x)$ kan baie naby 2 wees alhoewel dit nooit daaraan gelyk word nie. Byvoorbeeld, as jy $g(-20)$, bereken, is die waarde 2,000006 benaderd.Deur gebruik te maak van groter negatiewe waardes van$x$ sal dit$g(x)$ nog nader aan 2 bring: die waarde van$g(-100)$ is so na aan 2 dat die sakrekenaar nie presies genoeg die verskil kan aandui nie, en sal (foutiewelik) aan dui dat dit gelyk is aan 2 .

Hiervan lei ons af dat $y = 2$ 'n asimptoot is.

6.2.4.1 Asimptote

1. Gee die vergelyking van die asimptote van die grafiek van $y = 3^x - 2$.
2. Wat is die vergelyking van die horisontale asimptoot van die grafiek van $y = 3(0,8)^{x-1} - 3$?

6.2.5 Die skets van Grafieke van die Vorm $f(x) = ab^{(x+p)} + q$

Om grafieke te skets van die funksies van die vorm $f(x) = ab^{(x+p)} + q$, moet ons vier karaktereienskappe vasstel:

1. Gebied en terrein
2. y-afsnit
3. x-afsnit

Byvoorbeeld, skets die grafiek van $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1} + 2$. Steek die afsnitte af.

Ons stel die gebied vas as $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ en die terrein as $\{g(x) : g(x) \in (2, \infty)\}$.

Die y-afsnit is $y_{int} = 8$ en daar is geen$x$-afsnit nie.

Image not finished

Figure 6.10: Grafiek van $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1} + 2$.

6.2.5.1 Skets van Grafieke

1. Teken die grafieke van die volgende op dieselfde assestel. Benoem die horisontale asimptote en y-afsnitte duidelik.

   a. $y = b^x + 2$
   b. $y = b^{x+2}$

c. $y = 2b^x$
d. $y = 2b^{x+2} + 2$

a. Draw the graph of $f(x) = 3^x$.
b. Verduidelik waar 'n oplossing vir $3^x = 5$ van die grafiek afgelees kan word.

6.3 Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Die volgende tabel van waardes het kolomme waarin die y-waardes vir die grafiek $y = a^x$, $y = a^{x+1}$ en $y = a^x + 1$gegee word. Paar 'n grafiek met 'n kolom.

x	A	B	C
-2	7,25	6,25	2,5
-1	3,5	2,5	1
0	2	1	0,4
1	1,4	0,4	0,16
2	1,16	0,16	0,064

Table 6.2

2. Die grafiek van $f(x) = 1 + a.2^x$ (a is 'n konstante) gaan deur die oorsprong.
   a. Bepaal die waarde van a.
   b. Bepaal die waarde van$f(-15)$jkorrek tot VYF desimale plekke.
   c. Bepaal die waarde van$x$, as $P(x; 0,5)$ op die grafiek van $f$lê.
   d. As die grafiek van f 2 eenhede na regs verskuif word om die funksie h,te gee ,skryf neer die vergelyking van h.
3. Die grafiek van $f(x) = a.b^x$ $(a \neq 0)$het die punt P(2;144) op f.
   a. As $b = 0,75$, bereken die waarde van a.
   b. Skryf nou neer die vergelyking van f.
   c. Bepaal, korrek tot 2 desimale plekke, die waarde van $f(13)$.
   d. Beskryf die transformasie van die kurwe van f na h as $h(x) = f(-x)$.

Chapter 7

Gradiënt by 'n punt[1]

7.1 Inleiding

In Graad 10 het ons die idee van *gemiddelde gradiënt* ondersoek and gesien dat die gradiënt van sommige funksies verskillend is by verskillende intervalle. In Graad 11 kyk ons verder na die idee van gemiddelde gradiënt, en stel die idee van 'n gradiënt van 'n kurwe by 'n punt bekend.

7.2 Gemiddelde Gradiënt

Ons het gesien dat die gemiddelde gradiënt tussen twee punte op 'n kurwe die gradiënt is van die reguitlyn wat deur twee punte gaan.

Image not finished

Figure 7.1: The gemiddelde gradiënt tussen twee punte op 'n kurwe is die gradiënt van die reguitlyn wat deur die twee punte gaan.

Wat gebeur met die gradiënt as ons die posisie van een punt vasstel en die tweede punt nader aan die vaste punt beweeg?

7.2.1 Ondersoek: Gradiënt by 'n Enkele Punt op 'n Kurwe

Die kurwe gewys is gedefineër deur $y = -2x^2 - 5$. Punt B is vasgestel by koördinate (0, -5). Die posisie van punt A wissel. Voltooi die tabel hieronder deur die y-koördinate van punt A te bereken vir die gegewe x-koördinate. Bereken dan die gemiddelde gradiënt tussen punte A en B.

[1] This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39222/1.1/>.

x_A	y_A	gemiddelde gradiënt
-2		
-1.5		
-1		
-0.5		
0		
0.5		
1		
1.5		
2		

Table 7.1

Image not finished

Figure 7.2

Wat gebeur met die gemiddelde gradiënt soos A in die rigting van B beweeg? Wat gebreur met die gemiddelde gradieënt soos A wegbeweeg van B? Wat is die gemiddelde gradiënt wanneer A oorvleuel met B?

In Figure 7.3 verander die gradiënt van die reguitlyn wat deur punte A en C gaan soos A nader beweeg aan C. By die punt wat A en C oorvleuel gaan die reguitlyn slegs deur een punt op die kurwe. So 'n lyn is bekend as 'n *raaklyn* aan die kurwe.

Image not finished

(a)

Image not finished

(b)

Image not finished

(c)

Image not finished

(d)

Figure 7.3: Die gradiënt van die reguitlyn tussen A en C verander soos die punt A between langs die kurwe na C toe. Daar kom 'n punt wat A en C oorvleuel (soos gewys in (c)). By daardie punt is die lyn 'n raaklyn aan die kurwe.

Ons stel dan die idee bekend van 'n gradiënt by 'n enkele punt op 'n kurwe. Die gradiënt by 'n punt op 'n kurwe is eenvoudig die gradiënt van die raaklyn aan die kurwe by die gegewe punt.

Exercise 7.1: Gemiddelde Gradiënt ***(Solution on p. 77.)***

Kry die gemiddelde gradiënt tussen twee punte $\text{P}(a; g(a))$ en $\text{Q}(a+h; g(a+h))$ op die kurwe $g(x) = x^2$. Kry dan die gemiddelde gradiënt tussen $\text{P}(2; g(2))$ en $\text{Q}(4; g(4))$. Laastens, verduidelik wat gebeur met die gemiddelde gradiënt soos P nader beweeg aan Q.

Ons sien nou dat ons die vergelyking kan skryf om die gemiddelde gradiënt op 'n effens anderse manier te bereken. As ons 'n kurwe het gedefineer deur $f(x)$, dan vir twee punte P en Q met $\text{P}(a; f(a))$ en $\text{Q}(a+h; f(a+h))$, word die gemiddelde gradiënt tussen P en Q gegee deur $f(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - (a)} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Hierdie resultaat is belangrik om die gradiënt te bereken by 'n punt op 'n kurwe en dit sal in groter detail ondersoek word in Graad 12.

7.3 Hoofstukoefeninge

1. a. Bepaal die gemiddelde gradiënt van die kurwe $f(x) = x(x+3)$ tussen $x = \hat{A}$[U+0096]5 en $x = \hat{A}$[U+0096]3.
   b. Sê nou wat jy kan aflei oor die funksie f tussen $x = \hat{A}$[U+0096]5 en $x = \hat{A}$[U+0096]3.
2. A(1;3) is 'n punt op $f(x) = 3x^2$.
   a. Bepaal die gradiënt van die kurwe by punt A.
   b. Bepaal nou die vergelyking van die raaklyn by A.
3. Given: $f(x) = 2x^2$.
   a. Bepaal die gemiddelde gradiënt tussen $x = -2$ en $x = 1$.

b. Bepaal die gradiënt van die kurwe van f waar $x = 2$.

Solutions to Exercises in Chapter 7

Solution to Exercise 7.1 (p. 75)

Step 1.

$$x_1 = a \tag{7.2}$$

$$x_2 = a + h \tag{7.3}$$

Step 2. Deur die funksie $g(x) = x^2$ te gebruik, kry ons:

$$y_1 = g(a) = a^2 \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= g(a+h) \\ &= (a+h)^2 \\ &= a^2 + 2ah + h^2 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Step 3.

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{(a^2+2ah+h^2)-(a^2)}{(a+h)-(a)} \\ &= \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{a+h-a} \\ &= \frac{2ah+h^2}{h} \\ &= \frac{h(2a+h)}{h} \\ &= 2a + h \end{aligned} \tag{7.6}$$

Die gemiddelde gradiënt tussen P$(a; g(a))$ en Q$(a+h; g(a+h))$ op die kurwe $g(x) = x^2$ is $2a + h$.

Step 4. Ons kan die resultaat in (7.6) gebruik, maar ons sal moet bepaal wat a en h is. Ons doen dit deur te kyk na die definisies van P en Q. Die x-koërdinaat van P is a en die x-koördinaat van Q is $a + h$. Daarom as ons aanneem dat $a = 2$ en $a + h = 4$, dan is $h = 2$.
Dan is die gemiddelde gradiënt

$$2a + h = 2(2) + (2) = 6 \tag{7.7}$$

Step 5. soos punt P nader beweeg aan punt Q, word h kleiner. Dit beteken dat die gemiddelde gradiënt ook kleiner word. As die punt Q oorvleuel met die punt P, is $h = 0$ en die gemiddelde gradiënt word gegee deur $2a$.

Chapter 8

Meetkunde

8.1 Veelhoeke[1]

8.1.1 Inleiding

8.1.1.1 Uitbreiding : Meetkunde Geskiedenis

Werk in pare of groepe en ondersoek die geskiedenis van die ontwikkeling van meetkunde in die laaste 1500 jaar. Beskryf die verskeie stadiums van ontwikkeling enhoe verskeie kulture meetkunde gebruik het om hulle lewens te verbeter.

Die werke van die volgende mense moet ondersoek word:

1. Islamitiese meetkunde (c. 700 - 1500)
   a. Thabit ibn Qurra
   b. Omar Khayyam
   c. Sharafeddin Tusi
2. Meetkunde in die 17de – 20ste eeue (c. 700 - 1500)

8.1.2 Regte Piramides, Regte Konusse and Regte Sfere

'n Piramide is 'n geometriese soliede vorm met 'n veelhoek as basis. Die basis is gekoppel aan die 'n punt, wat die toppunt genoem word. Twee voorbeelde van piramides kan gesien word in die linkerhandse- en middelste figure in Figure 8.1. Die regterhandse figuur het 'n toppunt wat gekoppel is aan 'n sirkulêre (ronde) basis, en hierdie tipe meetkundige soliede vorm word 'n konus genoem. Konusse is soortgelyk aan piramides behalwe dat hulle basisse rond is eerder as veelhoeke.

Image not finished

Figure 8.1: Voorbeelde van 'n vierkantige piramide, driehoekige piramide en 'n konus.

Oppervlakarea van 'n Piramide

[1] This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39122/1.1/>.

Khan akademie video van soliede geometriese volumes

This media object is a Flash object. Please view or download it at
<http://www.youtube.com/v/ZqzAOZ9pP9Q&rel=0>

Figure 8.2

Die oppervlakarea word bereken deur die area van elke vlak individueel bymekaar te tel.

Exercise 8.1.1: Oppervlakarea *(Solution on p. 98.)*
Indien ‘n konus ‘n hoogte van h het en ‘n basis radius van r, wys dat die oppervlakareas $\pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2+h^2}$ is.

Volume of a Pyramid: Die volume van ‘n piramide kan bereken word deur :

$$V = \frac{1}{3} A \bullet h \tag{8.1}$$

waar A die oppervlak van die basis is en h die hoogte is.

’n Konus is soos ‘n piramide, en die volume van die konus word gegee deur:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h. \tag{8.2}$$

’n Vierkantige piramide het volume

$$V = \frac{1}{3} a^2 h \tag{8.3}$$

waar a die kantlengte van die vierkantige basis.

Exercise 8.1.2: Volume van ‘n Piramide *(Solution on p. 98.)*
Wat is die volume van ‘n vierkantige piramide wat 3cm hoog is en ‘n kantlengte van 2cm het?

Ons aanvaar die volgende formules vir volume en oppervlak van ‘n sfeer (‘n sfeer is ‘n wiskundige term vir ‘n ronde bal).

$$\begin{aligned} \text{Oppervlak} &= 4\pi r^2 \\ \text{Volume} &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned} \tag{8.4}$$

8.1.2.1 Oppervlak en volume

1. Bereken die volumes en oppervlakke van die volgende soliede liggame: *Wenk vir (e): vind die loodregte hoogte met behulp van die Stelling van Pythagoras.

Image not finished

Figure 8.3

Kliek hier vir die oplossing. [2]

[2] http://www.fhsst.org/l2D

2. Water beslaan ongeveer 71% van die aarde se oppervlak. Die aarde se radius is ongeveer 3678 km. Wat is die totale oppervlak wat deur land beslaan word? (oppervlakte wat nie deur water beslaan word nie)?
   Kliek hier vir die oplossing. [3]
3. ‘n Driehoekige piramide word bo-op driehoekige prisma geplaas. Die prisma het ‘n gelyksydige driehoek met sylengte van 20 cm as basis, en het ‘n hoogte van 42 cm. Die piramide het ‘n hoogte van 12cm.
   a. Wat is die totale volume van voorwerp wat uit hierdie twee vorms opgemaak word?
   b. Vind die oppervlakte van elke vlak van die piramide.
   c. Vind die totale oppervlakarea van die voorwerp.

Image not finished

Figure 8.4

Kliek hier vir die oplossing. [4]

8.1.3 Ooreenkomstigheid van Poligone

Twee polinome is soortgelyk indien die volgende waar is:

1. Alle ooreenkomstige hoeke moet kongruent wees.
2. Alle ooreenkomstige sye moet in dieselfde verhouding tot mekaar wees.Verwys na die diagram hier onder: dit beteken dus dat die verhouding van die sy AE van die groot poligoon tot die sy PT van die klein poligoon moet dieselfde wees as die verhouding van die sy AB tot sy PQ, BC/QR ens. vir *al* die sye.

Image not finished

Figure 8.5

As

1. $\hat{A}=\hat{P}$; $\hat{B}=\hat{Q}$; $\hat{C}=\hat{R}$; $\hat{D}=\hat{S}$; $\hat{E}=\hat{T}$ en
2. $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{CD}{RS}=\frac{DE}{ST}=\frac{EA}{TP}$

is die poligone ABCDE en PQRST soortgelyk.

Exercise 8.1.3: Soortgelykheid van Poligone ***(Solution on p. 99.)***

Poligone PQTU en PRSU is soortgelyk. Vind die waarde van x.

[3] http://www.fhsst.org/l2W
[4] http://www.fhsst.org

Image not finished

Figure 8.6

8.2 Driehoeke meetkunde[5]

8.2.1 Driehoek Meetkunde

8.2.1.1 Proporsie

Twee lynstukke is verdeel in die *dieselfde* proporsie as die verhoudings tussen die dele gelyk is.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{x}{y} = \frac{kx}{ky} = \frac{DE}{EF} \quad (8.5)$$

$$\therefore \text{die lynstukke is in dieselfde proporsie} \quad (8.6)$$

Image not finished

Figure 8.7

As die lynstukke eweredig is, is die volgende ook waar

1. $\frac{CB}{AC} = \frac{FE}{DF}$
2. $AC \cdot FE = CB \cdot DF$
3. $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{FE}$ en $\frac{BC}{AB} = \frac{FE}{DE}$
4. $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ en $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$

8.2.1.1.1 Evenredigheid van Driehoeke

Driehoeke met gelyke hoogtes het gebiede wat in dieselfde proporsie is tot mekaar as die basisse van die driehoeke.

$$\begin{aligned} h_1 &= h_2 \\ \therefore \frac{\text{gebied [U+25B5]}ABC}{\text{gebied [U+25B5]}DEF} &= \frac{\frac{1}{2}BC \times h_1}{\frac{1}{2}EF \times h_2} = \frac{BC}{EF} \end{aligned} \quad (8.7)$$

[5]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39210/1.1/>.

Image not finished

Figure 8.8

- 'n Spesiale geval van hierdie gebeur wanneer die basisse van die driehoeke gelyk is: Die Driehoeke met gelyke basisse tussen dieselfde ewewydige lyne het dieselfde gebied.

$$\text{gebied [U+25B5]}ABC = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC = \text{ gebied [U+25B5]}DBC \tag{8.8}$$

Image not finished

Figure 8.9

- Driehoeke op die dieselfde kant van dieselfde basis, met gelyke gebiede, lê tussen parallelle lyne.

$$\text{As gebied [U+25B5] ABC = gebied [U+25B5] BDC,} \tag{8.9}$$

$$\text{Dan AD } \parallel \text{ BC.} \tag{8.10}$$

Image not finished

Figure 8.10

Stelling 1 Proporsie Stelling: 'n streep parallel aan die een kant van' n driehoek verdeel die ander twee sye eweredig.

Image not finished

Figure 8.11

Gegee: [U+25B5] ABC met lyn DE || BC
nodig om te bewys:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \tag{8.11}$$

Bewys: Tekenh_1 van E loodreg op AD, enh_2 van D loodreg op AE.
Teken BE en CD.

$$\begin{aligned}
\frac{\text{gebied [U+25B5]ADE}}{\text{gebied [U+25B5]BDE}} &= \frac{\frac{1}{2}AD\cdot h_1}{\frac{1}{2}DB\cdot h_1} = \frac{AD}{DB} \\
\frac{\text{gebied [U+25B5]ADE}}{\text{gebied [U+25B5]CED}} &= \frac{\frac{1}{2}AE\cdot h_2}{\frac{1}{2}EC\cdot h_2} = \frac{AE}{EC} \\
\text{maar gebied [U+25B5]BDE} &= \text{gebied [U+25B5]CED (gelyk aan basis en hoogte)} \\
\therefore \frac{\text{gebied [U+25B5]ADE}}{\text{gebied [U+25B5]BDE}} &= \frac{\text{gebied [U+25B5]ADE}}{\text{gebied [U+25B5]CED}} \\
\therefore \frac{AD}{DB} &= \frac{AE}{EC}
\end{aligned} \quad (8.12)$$

$\therefore$ DE deel AB en AC proporsioneel.

Sortgelyk,

$$\begin{aligned}
\frac{AD}{AB} &= \frac{AE}{AC} \\
\frac{AB}{BD} &= \frac{AC}{CE}
\end{aligned} \quad (8.13)$$

Na aanleiding van die stelling "Proporsie" (Section 8.2.1.1: Proporsie), kan ons die middelpunt stelling bewys.

Stelling 2 Middelpuntstelling:'n lyn wat die middelpunte van die twee kante van 'n driehoek aansluit is parallel aan die derde sy en gelyk aan die helfte van die lengte van die derde kant.

Bewys: Dit is 'n spesiale geval van die Proporsie Stelling (Stelling "Proporsie" (Section 8.2.1.1: Proporsie)). As AB = BD en AC = AE, en AD = AB + BD = 2AB AE = AC + CB = 2AC dan DE $\parallel$ BC en BC = 2DE.

Image not finished

Figure 8.12

Stelling 3 Gelykvormigheid Stelling 1: Gelykhoekig driehoeke het hul sye in verhouding en is dus soortgelyk.

Image not finished

Figure 8.13

Gegee: [U+25B5]ABC en [U+25B5]DEF met $\hat{A}=\hat{D}$; $\hat{B}=\hat{E}$; $\hat{C}=\hat{F}$
nodig om te bewys:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad (8.14)$$

Konstrueer: G op AB, so dat AG = DE, H op AC, so dat AH = DF

Bewys: In [U+25B5]'s AGH en DEF

$$\begin{array}{rcll} \text{AG} & = & \text{DE} & \text{(Konst.)} \\ \text{AH} & = & D & \text{(Konst.)} \\ \hat{A} & = & \hat{D} & \text{(gegee)} \\ \therefore \text{[U+25B5]AGH} & \equiv & \text{[U+25B5]DEF} & \text{(SHS)} \\ \therefore A\hat{G}H & = & \hat{E}=\hat{B} & \\ \therefore GH & \parallel & \text{BC} & (\text{ooreenstemmende}\angle\text{'}s\ equal) \\ \therefore \frac{\text{AG}}{\text{AB}} & = & \frac{AH}{AC} & \text{(proporsie stelling)} \\ \therefore \frac{\text{DE}}{\text{AB}} & = & \frac{DF}{AC} & (\text{AG} = \text{DE}; \text{AH} = \text{DF}) \\ \therefore \text{[U+25B5]ABC} & ||| & \text{[U+25B5]DEF} & \end{array} \tag{8.15}$$

TIP: ||| bedoel "is soortgelyk aan"

Stelling 4 Gelykvormigheid Stelling 2: Driehoeke met sye in verhouding is gelykhoekig en daarom soortgelyke.

Image not finished

Figure 8.14

Gegee: [U+25B5]ABC met lyn DE sodanig dat

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \tag{8.16}$$

nodig om te bewys: $DE \parallel BC$; [U+25B5]ADE ||| [U+25B5]ABC

Bewys: Teken h_1 vanaf E loodreg op AD, en h_2 vanaf D loodreg op AE.
Teken BE en CD.

$$\begin{array}{rcl} \frac{\text{gebied [U+25B5]ADE}}{\text{gebied [U+25B5]BDE}} & = & \frac{\frac{1}{2}AD\cdot h_1}{\frac{1}{2}DB\cdot h_1} = \frac{AD}{DB} \\ \frac{\text{gebied [U+25B5]ADE}}{\text{gebied [U+25B5]CED}} & = & \frac{\frac{1}{2}AE\cdot h_2}{\frac{1}{2}EC\cdot h_2} = \frac{AE}{EC} \\ \text{maar } \frac{AD}{DB} & = & \frac{AE}{EC} \text{ (gegee)} \\ \therefore \frac{\text{gebied [U+25B5]ADE}}{\text{gebied [U+25B5]BDE}} & = & \frac{\text{gebied [U+25B5]ADE}}{\text{gebied [U+25B5]CED}} \\ \therefore \text{gebied [U+25B5]BDE} & = & \text{gebied [U+25B5]CED} \\ \therefore DE \parallel BC & & \text{(dieselfde kant met gelyke basis DE, dieselfde gebied)} \\ \therefore A\hat{D}E & = & A\hat{B}C \text{ (ooreenstemmende } \angle\text{'s)} \\ \text{en } A\hat{E}D & = & A\hat{C}B \end{array} \tag{8.17}$$

$$\therefore \text{[U+25B5]ADE en [U+25B5]ABC is gelykhoekig} \tag{8.18}$$

$$\therefore \text{[U+25B5]}ADE \;|||\; \text{[U+25B5]}ABC \;(\text{AAA}) \qquad (8.19)$$

Stelling 5 Pythagoras se Stelling: Tdie vierkant op die skuinssy van 'n reghoekige driehoek is gelyk aan die som van die vierkante van die ander twee kante

Gegee: [U+25B5] ABC met $\hat{A} = 90°$

Image not finished

Figure 8.15

Nodig om te bewys: $BC^2 = AB^2 + AC^2$
Proef:

$$\begin{aligned} \text{Laat } \hat{C} &= x \\ \therefore D\hat{A}C &= 90° - x \;(\angle\text{'e van 'n [U+25B5]}) \\ \therefore D\hat{A}B &= x \\ A\hat{B}D &= 90° - x \;(\angle\text{'e van 'n [U+25B5]}) \\ B\hat{D}A &= C\hat{D}A = \hat{A} = 90° \end{aligned} \qquad (8.20)$$

$$\therefore \text{[U+25B5]ABD}|||\text{[U+25B5]CBA en [U+25B5]CAD}|||\text{[U+25B5]CBA (AAA)} \qquad (8.21)$$

$$\therefore \frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BA} = \left(\frac{AD}{CA}\right) \text{en} \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA} = \left(\frac{AD}{BA}\right) \qquad (8.22)$$

$$\therefore AB^2 = CB \times BD \text{ en } AC^2 = CB \times CD \qquad (8.23)$$

$$\begin{aligned} \therefore AB^2 + AC^2 &= CB\,(BD + CD) \\ &= CB\,(CB) \\ &= CB^2 \\ i.e. BC^2 &= AB^2 + AC^2 \end{aligned} \qquad (8.24)$$

Exercise 8.2.1: Driehoek Meetkunde 1 *(Solution on p. 99.)*
In [U+25B5] GHI, GH ∥ LJ; GJ ∥ LK en $\frac{JK}{KI} = \frac{5}{3}$. Bepaal $\frac{HJ}{KI}$.

Image not finished

Figure 8.16

Exercise 8.2.2: Triangle Geometry 2 *(Solution on p. 100.)*

PQRS is 'n trapesium, met PQ $\parallel$ RS. Bewys dat PT $\cdot$ TR = ST $\cdot$ TQ.

Image not finished

Figure 8.17

8.2.1.1.1.1 Driehoekige Meetkunde

1. Bereken SV

Image not finished

Figure 8.18

2. $\frac{CB}{YB} = \frac{3}{2}$. Vind $\frac{DS}{SB}$.

Image not finished

Figure 8.19

3. Gegee die volgende figuur met die volgende lengtes, vind AE, EC en BE. BC = 15 cm, AB = 4 cm, CD = 18 cm, en ED = 9 cm.

Image not finished

Figure 8.20

4. Met behulp van die volgende figuur en lengtes, vind IJ en KJ. HI = 26 m, KL = 13 m, JL = 9 m en HJ = 32 m.

Image not finished

Figure 8.21

5. Vind FH in die volgende figuur.

Image not finished

Figure 8.22

6. BF = 25 m, AB = 13 m, AD = 9 m, DF = 18m. Bereken die lengtes van BC, CF, CD, CE en EF, en vind die verhouding $\frac{DE}{AC}$.

Image not finished

Figure 8.23

7. As LM $\|$ JK, bereken y.

Image not finished

Figure 8.24

8.3 Koördinaatmeetkunde[6]

8.3.1 Koördinaatmeetkunde

8.3.1.1 Die Vergelyking van 'n Lyn tussen Twee Punte

Khan akademie video oor punt-helling en standaard vorm

This media object is a Flash object. Please view or download it at
<http://www.youtube.com/v/-6Fu2T_RSGM&rel=0>

Figuur 8.25

Daar is verskeie gegewens en metodes wat dit moontlik maak om die vergelyking van 'n reguit lyn te bepaal. Een so 'n metode word gebruik wanneer twee punte byvoorbeeld gegee word.

[6]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39127/1.1/>.

Aanvaar die twee punte is onderskeidelik $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$. Ons weet ook die algemene vorm vir die vergelyking van 'n reguit lyn is:

$$y = mx + c \tag{8.25}$$

Die vergelyking van 'n lyn wat deur hierdie twee punte gaan, kan eers verkry word as ons die waardes van m (die gradiënt van die lyn) en c (die y-afsnit van die lyn) het. Gevolglik is die vergelyking:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \tag{8.26}$$

waar $(x_1; y_1)$ die koördinate van die gegewe punte is.

8.3.1.1.1 Die Tweede Vergelyking van 'n Reguit Lyn

'n Stel gelyktydige vergelykings kan soos volg geskryf word:

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + c \\ y_2 &= mx_2 + c \end{aligned} \tag{8.27}$$

Ons het nou twee vergelykings en twee onbekendes, naamlik m en c.

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= mx_2 - mx_1 \\ \therefore\ m &= \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y_1 &= mx_1 + c \\ c &= y_1 - mx_1 \end{aligned} \tag{8.28}$$

Nou, om dinge bietjie makliker te maak, vervang (8.28) in (8.25):

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ &= mx + (y_1 - mx_1) \\ y - y_1 &= m\,(x - x_1) \end{aligned} \tag{8.29}$$

> WENK: Indien jy gevra word om die vergelyking van 'n lyn te bepaal wat deur twee punte gaan, gebruik:
>
> $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{8.30}$$
>
> om m te bereken. Gebruik dan:
>
> $$y - y_1 = m\,(x - x_1) \tag{8.31}$$
>
> om die vergelyking te bepaal.

Byvoorbeeld, die vergelyking van 'n reguit lyn deur $(-1; 1)$ en $(2; 2)$ word verkry deur eers m te bereken:

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \tfrac{2-1}{2-(-1)} \\ &= \tfrac{1}{3} \end{aligned} \tag{8.32}$$

Hierdie waarde word dan vervang in:

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right) \tag{8.33}$$

om sodoende die volgende te verkry:

$$y - y_1 = \frac{1}{3}\left(x - x_1\right). \tag{8.34}$$

Vervang nou $(-1;1)$ om te kry dat:

$$\begin{aligned} y - (1) &= \frac{1}{3}\left(x - (-1)\right) \\ y - 1 &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ y &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 1 \\ y &= \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \end{aligned} \tag{8.35}$$

So, $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ gaan deur $(-1;1)$ en $(2;2)$.

Image not finished

Figure 8.26

Exercise 8.3.1: Vergelyking van 'n Reguit Lyn ***(Solution on p. 100.)***

Bepaal die vergelyking van 'n reguit lyn wat deur die punte $(-3;2)$ en $(5;8)$ gaan.

8.3.1.2 Vergelyking van 'n Lyn parallel aan, of loodreg op, 'n Ander Lyn, gegee Een Punt

Nog 'n metode om die vergelyking van 'n reguit lyn te bepaal, kan gebruik word, gegee 'n punt op die lyn se koördinate, $(x_1;y_1)$, en wanneer daar uitdruklik gesê word die lyn is loodreg op, of parallel aan, 'n ander lyn. Indien die vergelykings van die onbekende en gegewe lyne onderskeidelik $y = mx + c$ en $y = m_0x + c_0$ is, weet ons die volgende:

$$\begin{aligned} \text{Indien die lyne parallel sou wees, dan is} \quad m &= m_0 \\ \text{Indien die lyne loodreg sou wees, dan is} \quad m \times m_0 &= -1 \end{aligned} \tag{8.36}$$

Sodra ons 'n waarde vir m bepaal het, kan ons hierdie waarde gebruik tesame met:

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right) \tag{8.37}$$

om die vergelyking van die lyn te bepaal.

Byvoorbeeld, bepaal die vergelyking van 'n lyn wat parallel is aan $y = 2x - 1$ en wat deur die punt $(-1;1)$ gaan.

Eerstens kry ons vir m, die gradiënt van die lyn. Aangesien dié lyn parallel aan $y = 2x - 1$ is, weet ons dat:

$$m = 2 \tag{8.38}$$

Die vergelyking van die lyn word gevind deur m en $(-1;1)$ te vervang in:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= 2(x - (-1)) \\ y - 1 &= 2(x + 1) \\ y - 1 &= 2x + 2 \\ y &= 2x + 2 + 1 \\ y &= 2x + 3 \end{aligned} \tag{8.39}$$

Image not finished

Figure 8.27: Die vergelyking van 'n lyn wat deur $(-1;1)$ gaan en parallel is aan $y = 2x-1$, is $y = 2x+3$. Hier kan duidelik gesien word dat die twee lyne parallel is. Jy kan toets deur om die loodregte afstand tussen die twee lyne by verskillende punte te meet met jou liniaal.

8.3.1.3 Hellingshoek

Image not finished

Figure 8.28: (a) 'n Lyn maak 'n hoek θ met die x-as. (b) Die hoek is afhanklik van die gradiënt. As m_f die gradiënt van f, en m_g die gradiënt van g is, dan is $m_f > m_g$ en $\theta_f > \theta_g$.

In Figure 8.28(a), sien ons dat die lyn 'n hoek θ maak met die x-as. Hierdie hoek staan bekend as die *hellingshoek* van die lyn en is soms van belang.

Eerstens sien ons dat, soos die gradiënt verander, verander die waarde van θ (Figure 8.28(b)). Ons verwag dus dat daar 'n verwandskap bestaan tussen die hellingshoek van 'n lyn en die gradiënt. Ons weet ook dat die gradiënt 'n verhouding van verandering in die y-rigting tot verandering in die x-rigting is.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{8.40}$$

In Figure 8.28(a) sien ons egter:

$$\begin{aligned} tan\theta &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \therefore m &= tan\theta \end{aligned} \tag{8.41}$$

Byvoorbeeld, om die hellingshoek van die lyn $y = x$ te bepaal, weet ons dat $m = 1$

$$\begin{aligned} \therefore tan\theta &= 1 \\ \therefore \theta &= 45° \end{aligned} \quad (8.42)$$

8.3.1.3.1 Koördinaatmeetkunde

1. Bepaal die vergelykings van die volgende lyne.
   a. deur punte $(-1;3)$ en $(1;4)$
   b. deur punte $(7;-3)$ en $(0;4)$
   c. parallel aan $y = \frac{1}{2}x + 3$ en deur $(-1;3)$
   d. loodreg op $y = -\frac{1}{2}x + 3$ en deur $(-1;2)$
   e. loodreg op $2y + x = 6$ en deur die oorsprong
2. Bepaal die hellingshoek van die volgende lyne.
   a. $y = 2x - 3$
   b. $y = \frac{1}{3}x - 7$
   c. $4y = 3x + 8$
   d. $y = -\frac{2}{3}x + 3$ (Wenk: as m negatief is, sal θ in die tweede kwadrant wees)
   e. $3y + x - 3 = 0$
3. Wys dat die lyn $y = k$ parallel is aan die x-as vir enige konstante k. (Wenk: Wys dat die hellingshoek van die lyn 0° is.)
4. Wys dat die lyn $x = k$ parallel is aan die y-as vir enige konstante k. (Wenk: Wys dat die hellingshoek van die lyn 90° is.)

8.4 Transformasies[7]

8.4.1 Transformasies

8.4.1.1 Rotasie om 'n Punt

Wanneer 'n voorwerp rondom 'n vaste punt beweeg word, gebruik ons die term *rotasie* om die punt. Wat gebeur met die koördinate van 'n punt wanneer daardie voorwerp om 'n punt van 90° of 180° om die oorsprong roteer word?

8.4.1.1.1 Ondersoek: Roteer 'n punt deur die oorsprong deur 90°

Voltooi die tabel deur die koördinate van die punte wat in die figuur vertoon word, in te vul.

[7] This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39124/1.1/>.

Punt	x**-koördinaat**	y**-koördinaat**
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		

Table 8.1

Image not finished

Figuur 8.29

Wat let jy op van die x-koördinate? Wat let jy op van die y-koördinate? Wat sal gebeur met die koördinate van punt A as dit na die posisie van punt C roteer word? Wat sal gebeur as die koördinate van punt B roteer word tot die posisie van D?

8.4.1.1.2 Ondersoek: Rotasie deur die oorsprong deur $180°$

Voltooi die tabel deur die koördinate wat in die figuur vertoon word, in te vul.

Punt	x**-koördinaat**	y**-koördinaat**
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		

Table 8.2

Image not finished

Figuur 8.30

Wat let jy op van die x-koördinate? Wat let jy op van die y-koördinate? Wat sal gebeur met die koördinate van punt A as dit na die posisie van punt E roteer word? Wat sal gebeur met die koördinate van punt F as dit na die posisie van punt B roteer word?

Die volgende gevolgtrekkings kan vanuit die vorige aktiwiteite gemaak word:

- 90° kloksgewyse rotasie: Die beeld van 'n punt P$(x;y)$ wat kloksgewys geroteer is deur 90° om die oorsprong is P'$(y;-x)$. Ons druk die rotasie uit as $(x;y) \rightarrow (y;-x)$.
- 90° antikloksgewyse rotasie: Die beeld van 'n punt P$(x;y)$ wat antikloksgewys geroteer is deur 90° om die oorsprong is P'$(-y;x)$. Ons druk die rotasie uit as $(x;y) \rightarrow (-y;x)$.
- 180° rotasie: Die beeld van 'n punt P$(x;y)$ wat geroteer word deur 180° om die oorsprong is P'$(-x;-y)$. Ons druk die rotasie uit as $(x;y) \rightarrow (-x;-y)$.

Image not finished

Figuur 8.31

Image not finished

Figuur 8.32

Image not finished

Figuur 8.33

8.4.1.1.3 Rotasie

1. Doen die volgende vir elke rotasie om die oorsprong: (i) Skryf die toepaslike reël neer. (ii) Teken 'n diagram wat die rigting van die rotasie aandui.
   a. OA word geroteer na OA' met A(4;2) en A'(-2;4)
   b. OB word geroteer na OB' met B(-2;5) en B'(5;2)
   c. OC word geroteer na OC' met C(-1;-4) en C'(1;4)

2. KopieerΔXYZ op grafiekpapier. Die koördinate word op die figuur aangedui.
   a. Roteer ΔXYZ antikloksgewys deur 'n hoek van 90° om die oorsprong om die volgende te kry ΔX'Y'Z'. Dui die koördinate van X', Y' en Z' aan.
   b. Roteer ΔXYZ deur 180° om die oorsprong om die volgende te kry ΔX''Y''Z''. Dui die koördinate van X'', Y'' en Z'' aan.

Image not finished

Figuur 8.34

8.4.1.2 Vergroting van 'n Veelhoek

Wanneer 'n voorwerp groter word, noem ons die resultaat 'n *vergroting* van die oorspronklike voorwerp. Wat gebeur met die koördinate van 'n veelhoek wat vergroot is met 'n faktor k?

8.4.1.2.1 Ondersoek: Vergroting van 'n Veelhoek 1

Voltooi die tabel deur die koördinate van die punte wat in die figuur aangedui is, in te vul. Aanvaar dat elke klein vierkant op die grafiekpapier 1 eenheid voorstel.

Punt	**x-koördinaat**	**y-koördinaat**
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		

Table 8.3

Image not finished

Figuur 8.35

Wat let jy op van die x-koördinate ? Wat let jy op van die y-koördinate ? Wat sal gebeur met die koördinate van punt A as die vierkant ABCD vergroot sal word met die faktor 2?

8.4.1.2.2 Ondersoek: Vergroting van 'n Veelhoek 2

Image not finished

Figuur 8.36

In die figuur is die vierhoek HIJK vergroot met die faktor van 2 deur die oorsprong om H'I'J'K' te vorm. Voltooi die volgende tabel deur gebruik te maak van die inligting wat in die figuur gegee word.

Koördinate	Koördinate'	Lengte	Lengte'
H = (;)	H' = (;)	OH =	OH' =
I = (;)	I' = (;)	OI =	OI' =
J = (;)	J' = (;)	OJ =	OJ' =
K = (;)	K' + (;)	OK =	OK' =

Table 8.4

Watter gevolgtrekkings kan jy nou maak omtrent die volgende:

1. die koördinate
2. die lengtes wanneer daar vergroot word met die faktor van 2?

Die volgende gevolgtrekkings kan gemaak word:

Laat die hoekpunte van 'n driehoek die volgende koördinate hê S($x_1;y_1$), T($x_2;y_2$), U($x_3;y_3$). [U+25B5]S'T'U' is 'n vergroting deur die oorsprong van [U+25B5]STU met 'n faktor van c ($c > 0$).

- [U+25B5]STU is 'n vermindering van [U+25B5]S'T'U' met 'n faktor van c.
- [U+25B5]S'T'U' kan andersins ook gesien word as 'n vermindering deur die oorsprong van [U+25B5]STU met die faktor van $\frac{1}{c}$. (Let op dat 'n vermindering met $\frac{1}{c}$ dieselfde is as 'n vergroting van c).
- Die hoekpunte van [U+25B5]S'T'U' is S'($cx_1;cy_1$), T'(cx_2,cy_2), U'(cx_3,cy_3).
- Die afstande van die oorsprong is OS' = cOS, OT' = cOT en OU' = cOU.

Image not finished

Figuur 8.37

8.4.1.2.3 Transformasies

1. Kopieër veelhoek STUV op grafiekpapier en beantwoord die volgende vrae.

Image not finished

Figuur 8.38

a. Wat is die koördinate van veelhoek STUV?
b. Vergroot die veelhoek deur die oorsprong met 'n konstante faktor van $c = 2$. Teken hierdie op dieselfde assestelsel op jou grafiekpapier. Benoem dit S'T'U'V'.
c. Wat is die koördinate van die hoekpunte S'T'U'V'?

2. [U+25B5]ABC is 'n vergroting van [U+25B5]A'B'C' met 'n konstante faktor van k deur die oorsprong.

a. Wat is koördinate van die hoekpunte van [U+25B5]ABC en [U+25B5]A'B'C'?
b. Bereken, met redes, die waarde van k.
c. As die oppervlakte [U+25B5]ABC m keer die oppervlakte van [U+25B5]A'B'C', wat is m?

Image not finished

Figuur 8.39

3. Image not finished

Figuur 8.40

a. Wat is die koördinate van die hoekpunte van die veelhoek MNPQ?
b. Vergroot die veelhoek deur die oorsprong deur gebruik te maak van die konstante faktor van $c = 3$ sodat jy veelhoek M'N'P'Q' kry. Teken hierdie op dieselfde assestelsel.
c. Wat is die koördinate van die nuwe hoekpunte?
d. Teken nou M"N"P"Q" wat 'n antikloksgewyse rotasie van MNPQ deur 90° deur die oorsprong is.
e. Wat is die helling van OM".

Solutions to Exercises in Chapter 8

Solution to Exercise 8.1.1 (p. 80)

Step 1. Image not finished

Figure 8.41

Step 2. Die konus het twee vlakke: die basis en die kantvlakke. Die basis is ‘n sirkel met ‘n radius van r en die kantvlakke kan oopgevlek word om ‘n sektor van ‘n sirkel te vorm.

Image not finished

Figure 8.42

Die geboë oppervlak kan opgesny word in ‘n groot hoeveelheid dun driehoeke met hoogte ongeveer gelyk aan a (a a word die *skuinshoogte* genoem). Die oppervlaktes van hierdie driehoeke te op tot $\frac{1}{2}$×basis×hoogte(van ‘n klein driehoek) wat $\frac{1}{2} \times 2\pi r \times a = \pi r a$ is

Step 3. a kan berekend word met die Stelling van Pythagoras. Daarom:

$$a = \sqrt{r^2 + h^2} \quad (8.43)$$

Step 4.

$$A_b = \pi r^2 \quad (8.44)$$

Step 5.

$$\begin{aligned} A_w &= \pi r a \\ &= \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \end{aligned} \quad (8.45)$$

Step 6.

$$\begin{aligned} A &= A_b + A_w \\ &= \pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \end{aligned} \quad (8.46)$$

Solution to Exercise 8.1.2 (p. 80)

Step 1. Die volume vir ‘n piramide is

$$V = \frac{1}{3} A \bullet h \quad (8.47)$$

waar A die oppervlak van die basis is en h die hoogte van die piramide is. Vir ‘n vierkantige basis beteken dit

$$V = \frac{1}{3} a \bullet a \bullet h \quad (8.48)$$

waar a die kantlengte van die vierkantige basis is.

Image not finished

Figure 8.43

Step 2.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \bullet 2 \bullet 2 \bullet 3 \\ &= \frac{1}{3} \bullet 12 \\ &= 4 \text{ cm}^3 \end{aligned} \quad (8.49)$$

Solution to Exercise 8.1.3 (p. 81)

Step 1. Aangesien die poligone soortgelyk is,

$$\begin{aligned} \frac{PQ}{PR} &= \frac{TU}{SU} \\ \therefore \frac{x}{x+(3-x)} &= \frac{3}{4} \\ \therefore \frac{x}{3} &= \frac{3}{4} \\ \therefore x &= \frac{9}{4} \end{aligned} \quad (8.50)$$

Solution to Exercise 8.2.1 (p. 86)

Step 1.

$$\begin{aligned} L\hat{I}J &= G\hat{I}H \\ J\hat{L}I &= H\hat{G}I \,(\text{ooreenstemmende.}\angle e) \\ \therefore \text{[U+25B5]}LIJ &\;|||\; \text{[U+25B5]}GIH \,(\text{gelykhoekige[U+25B5]}e) \end{aligned} \quad (8.51)$$

$$\begin{aligned} L\hat{I}K &= G\hat{I}J \\ K\hat{L}I &= J\hat{G}I \,(\text{Ooreenstemmende}\angle e) \\ \therefore \text{[U+25B5]}LIK &\;|||\; \text{[U+25B5]}GIJ \,(\text{Gelykhoekige[U+25B5]}e) \end{aligned} \quad (8.52)$$

Step 2.

$$\begin{aligned} \frac{HJ}{JI} &= \frac{GL}{LI} \,(\text{[U+25B5]}LIJ \;|||\; \text{[U+25B5]}GIH) \\ \text{en } \frac{GL}{LI} &= \frac{JK}{KI} \,(\text{[U+25B5]}LIK \;|||\; \text{[U+25B5]}GIJ) \\ &= \frac{5}{3} \\ \therefore \frac{HJ}{JI} &= \frac{5}{3} \end{aligned} \quad (8.53)$$

Step 3.

$$\frac{HJ}{KI} = \frac{HJ}{JI} \times \frac{JI}{KI} \quad (8.54)$$

Ons moet die volgende bereken $\frac{JI}{KI}$: Ons is gegee $\frac{JK}{KI} = \frac{5}{3}$ Na herrangskiking, het ons $JK = \frac{5}{3}KI$ En:

$$\begin{aligned} JI &= JK + KI \\ &= \frac{5}{3}KI + KI \\ &= \frac{8}{3}KI \\ \frac{JI}{KI} &= \frac{8}{3} \end{aligned} \quad (8.55)$$

Met die gebruik van hierdie verhouding:

$$\begin{aligned} &= \tfrac{5}{3} \times \tfrac{8}{3} \\ &= \tfrac{40}{9} \end{aligned} \quad (8.56)$$

Solution to Exercise 8.2.2 (p. 87)

Step 1.

$$\begin{aligned} \hat{P_1} &= \hat{S_1} \text{ (Alt.}\angle s) \\ \hat{Q_1} &= \hat{R_1} \text{ (Alt.}\angle s) \\ \therefore \text{[U+25B5]} PTQ &\; ||| \; \text{[U+25B5]} STR \, (\text{gelykhoekige} \text{[U+25B5]} e) \end{aligned} \quad (8.57)$$

Step 2.

$$\begin{aligned} \tfrac{PT}{TQ} &= \tfrac{ST}{TR} \, (\text{[U+25B5]} PTQ ||| \text{[U+25B5]} STR) \\ \therefore PT \cdot TR &= ST \cdot TQ \end{aligned} \quad (8.58)$$

Solution to Exercise 8.3.1 (p. 90)

Step 1.

$$\begin{aligned} (x_1; y_1) &= (-3; 2) \\ (x_2; y_2) &= (5; 8) \end{aligned} \quad (8.59)$$

Step 2.

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \tfrac{8-2}{5-(-3)} \\ &= \tfrac{6}{5+3} \\ &= \tfrac{6}{8} \\ &= \tfrac{3}{4} \end{aligned} \quad (8.60)$$

Step 3.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - (2) &= \tfrac{3}{4}\,(x - (-3)) \\ y &= \tfrac{3}{4}\,(x + 3) + 2 \\ &= \tfrac{3}{4}x + \tfrac{3}{4} \cdot 3 + 2 \\ &= \tfrac{3}{4}x + \tfrac{9}{4} + \tfrac{8}{4} \\ &= \tfrac{3}{4}x + \tfrac{17}{4} \end{aligned} \quad (8.61)$$

Step 4. Die vergelyking van 'n reguit lyn wat deur $(-3; 2)$ en $(5; 8)$ gaan, is $y = \frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$.

Chapter 9

Trigonometrie

9.1 Grafieke van trigonometriese funksies[1]

9.1.1 Die Geskiedenis van Trigonometrie

Werk twee-twee of in groepe en ondersoek die geskiedenis van trigonometrie. Beskryf die verskillende stappe van die ontwikkeling en hoe verskillende kulture trigonometire gebruik om hulle lewens te verbeter.

Die werk van die volgende mense of kulture kan ondersoek word:

1. Kulture
   a. Antieke Egiptenare
   b. Mesopotamië
   c. Antieke Indiërs van die Indusvallei
2. Mense
   a. Lagadha (ongeveer 1350-1200 vC)
   b. Hipparchus (ongeveer 150 vC)
   c. Ptolemy (ongeveer 100)
   d. Aryabhata (ongeveer 499)
   e. Omar Khayyam (1048-1131)
   f. Bhaskara (ongeveer 1150)
   g. Nasir al-Din (13de eeu)
   h. al-Kashi en Ulugh Beg (14de eeu)
   i. Bartholemaeus Pitiscus (1595)

9.1.2 Grafieke van Trigonometriese Funksies

9.1.2.1 Funksies van die vorm $y = sin\left(k\theta\right)$

In die vergelyking, $y = sin\left(k\theta\right)$, is k 'n konstante en het verskillende effekte op die grafiek van die funksie. Die algemene vorm van so 'n grafiek word gegee in Figure 9.1 vir die funksie $f\left(\theta\right) = sin\left(2\theta\right)$.

[1] This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39209/1.1/>.

Image not finished

Figure 9.1: Grafiek van $f(\theta) = sin(2\theta)$ (vastelyn) en die grafiek van $g(\theta) = sin(\theta)$ (stippellyn).

9.1.2.1.1 Funksies van die vorm $y = sin(k\theta)$

Op dieselfde assestelsel, plot die volgende grafieke:

1. $a(\theta) = sin0,5\theta$
2. $b(\theta) = sin1\theta$
3. $c(\theta) = sin1,5\theta$
4. $d(\theta) = sin2\theta$
5. $e(\theta) = sin2,5\theta$

Gebruik jou resultate om die effek van k af te lei.

Jy behoort te vind dat die waarde van k die periode of frekwensie affekteer. Let op dat in die geval van die sinus grafiek, die periode (lengte van een golf) gegee word deur $\frac{360°}{k}$.

Die verskillende eienskappe word opgesom in Table 9.1.

$k > 0$	$k < 0$
Image not finished **Figure 9.2**	

Table 9.1: Tabel wat die algemene vorm en posisie van grafieke van funksies in die vorm $y = sin(kx)$ opsom. Die kurwe van $y = sin(x)$ word voorgestel deur die stippel lyn.

9.1.2.1.2 Definisie versameling en Waarde versameling

Vir $f(\theta) = sin(k\theta)$ is die definisieversameling $\{\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$, omdat daar geen waarde van $\theta \in \mathbb{R}$ is waarvoor $f(\theta)$ ongedefinieerd is nie.

Die waardeversameling van $f(\theta) = sin(k\theta)$ is $\{f(\theta) : f(\theta) \in [-1, 1]\}$.

9.1.2.1.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm $y = sin(k\theta)$, word die nodige inligting om die afsnit met betrekking tot die y as gegee.

Daar is baie x-afsnitte.

Die y-afsnit word bereken deur $\theta = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} y &= sin\left(k\theta\right) \\ y_{\text{afsnit}} &= sin\left(0\right) \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (9.1)$$

9.1.2.2 Funksies van die vorm $y = cos\left(k\theta\right)$

In die vergelyking $y = cos\left(k\theta\right)$, is k 'n konstante en het verskeie effekte op die grafiek van die funksies. Die algemene vorm van die grafiek van hierdie soort funksies word gegee in Figure 9.4 vir die funksie $f\left(\theta\right) = cos\left(2\theta\right)$.

Image not finished

Figure 9.4: Grafiek van $f\left(\theta\right) = cos\left(2\theta\right)$ (vastelyn) en die grafiek van $g\left(\theta\right) = cos\left(\theta\right)$ (stippellyn).

9.1.2.2.1 Funksies van die vorm $y = cos\left(k\theta\right)$

Op dieselfde assestelsel, plot die volgende grafieke:

1. $a\left(\theta\right) = cos0,5\theta$
2. $b\left(\theta\right) = cos1\theta$
3. $c\left(\theta\right) = cos1,5\theta$
4. $d\left(\theta\right) = cos2\theta$
5. $e\left(\theta\right) = cos2,5\theta$

Gebruik jou resultate om die effek van k af te lei.

Jy behoort te vind dat die waarde van k affekteer die periode of frekwensie van die grafiek. Die periode van die cosinus grafiek word gegee deur $\frac{360^\circ}{k}$.

Die verskillende eienskappe word opgesom in Table 9.2.

$k > 0$	$k < 0$
Image not finished **Figure 9.5**	

Table 9.2: Tabel wat die algemene vorms en posisies van grafieke van funksie in die vorm $y = cos\left(kx\right)$ opsom. Die kurwe van $y = cos\left(x\right)$ is geplot met die stippel lyn.

9.1.2.2.2 Definisie versameling en Waarde versameling

Vir $f(\theta) = cos(k\theta)$, is die definisie versameling $\{\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$, omdat daar geen waarde is van $\theta \in \mathbb{R}$ waarvoor $f(\theta)$ ongedefinieerd is nie.

Die waarde versameling van $f(\theta) = cos(k\theta)$ is $\{f(\theta) : f(\theta) \in [-1, 1]\}$.

9.1.2.2.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm $y = cos(k\theta)$, word die metode om die afsnitte met die y-as te bereken gegee.

Die y-afsnit word as volg bereken:

$$\begin{aligned} y &= cos(k\theta) \\ y_{\text{afsnit}} &= cos(0) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{9.2}$$

9.1.2.3 Funksies van die vorm $y = tan(k\theta)$

In die vergelyking $y = tan(k\theta)$, is k 'n konstante en het verskeie effekte op die grafiek van die funksie. Die algemene vorm van die grafiek van die soort funksie word gewys in Figure 9.7 for the function $f(\theta) = tan(2\theta)$.

Image not finished

Figure 9.7: Die grafiek van $tan(2\theta)$ (vastelyn) en die grafiek van $g(\theta) = tan(\theta)$ (stippellyn). Die asimtote word aangetoon deur die strepies lyn.

9.1.2.3.1 Funksies van die vorm $y = tan(k\theta)$

Op dieselfde assestelsel, plot die volgende grafieke:

1. $a(\theta) = tan 0,5\theta$
2. $b(\theta) = tan 1\theta$
3. $c(\theta) = tan 1,5\theta$
4. $d(\theta) = tan 2\theta$
5. $e(\theta) = tan 2,5\theta$

Gebruik jou resultate om die effek van k af te lei.

Jy behoort te vind dat die waarde van k, weereens, die periode of frekwensie van die grafiek affekteer. Soos k vermeerder, word die grafiek meer kompak en soos k verminder, word die grafiek meer versprei. The periode van die tan grafiek word gegee deur $\frac{180°}{k}$.

Hierdie verskillende eienskappe word opgesom in Table 9.3.

$k > 0$	$k < 0$
Image not finished **Figure 9.8**	

Table 9.3: Tabel wat die algemene vorm en posisie van die grafieke van funksie in die vorm $y = tan\,(k\theta)$ opsom.

9.1.2.3.2 Definisie versameling en Waarde versameling

Vir $f\,(\theta) = tan\,(k\theta)$ is die definisie versameling van een tak $\{\theta : \theta \in \left(-\frac{90^\circ}{k}, \frac{90^\circ}{k}\right)\}$, omdat die funksie ongedefinieerd is vir $\theta = -\frac{90^\circ}{k}$ en $\theta = \frac{90^\circ}{k}$.

Die waarde versameling van $f\,(\theta) = tan\,(k\theta)$ is $\{f\,(\theta) : f\,(\theta) \in (-\infty, \infty)\}$.

9.1.2.3.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm $y = tan\,(k\theta)$, word die metode om die afsnitte met die x en y asse te bereken gegee.

Daar is baie x-afsnitte; elkeen is halfpad tussen die asimtote.

Die y-afsnit word as volg bereken:

$$\begin{aligned} y &= tan\,(k\theta) \\ y_{\text{afsnit}} &= tan\,(0) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{9.3}$$

9.1.2.3.4 Asimtote

Die grafiek van $tank\theta$ het asimtote omdat soos $k\theta$ 90° benader, benader $tan(\mathrm{k}\theta)$ oneindig. Met ander woorde, daar is geen gedefinieerde waarde van die funksie by die asimtoot waardes nie.

9.1.2.4 Funksies van die vorm $y = sin\,(\theta + p)$

In die vergelyking, $y = sin\,(\theta + p)$ is p 'n konstante en het verskillende effekte op die grafiek van die funksie. Die algemene vorm van die grafiek van die funksies in hierdie vorm word aangetoon in Figure 9.10 met die funksie $f\,(\theta) = sin\,(\theta + 30^\circ)$.

Image not finished

Figure 9.10: Grafiek van $f\,(\theta) = sin\,(\theta + 30^\circ)$ (vastelyn) en die grafiek van $g\,(\theta) = sin\,(\theta)$ (stippellyn).

9.1.2.4.1 Funksies van die vorm $y = sin\left(\theta + p\right)$

Op dieselfde assestelsel, plot die volgende grafieke:

1. $a\left(\theta\right) = sin\left(\theta - 90°\right)$
2. $b\left(\theta\right) = sin\left(\theta - 60°\right)$
3. $c\left(\theta\right) = sin\theta$
4. $d\left(\theta\right) = sin\left(\theta + 90°\right)$
5. $e\left(\theta\right) = sin\left(\theta + 180°\right)$

Gebruik jou resultate om die effek van p af te lei.

Jy behoort te vind dat die waarde van p die posisie van die grafiek op die y-as affekteer (die y-afsnit) en die posisie van die grafiek op die x-as (die *faseverskuiwing*). Die p waarde skuif die grafiek horisontaal. Indien p positief is, skuif die grafiek links en indien p negatief is, skuif die grafiek regs.

Hierdie verskillende eienskappe word opgesom in Table 9.4.

$p > 0$	$p < 0$
Image not finished **Figure 9.11**	

Table 9.4: Tabel wat die algemene vorm en posisie van grafieke van funkies in die vorm $y = sin\left(\theta + p\right)$ opsom. Die kurwe $y = sin\left(\theta\right)$ is geplot met 'n stippellyn.

9.1.2.4.2 Definisie versameling en Waarde versameling

Vir $f\left(\theta\right) = sin\left(\theta + p\right)$ is die definisie versameling $\{\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$, omdat daar geen waardes van $\theta \in \mathbb{R}$ is waarvoor $f\left(\theta\right)$ ongedefinieerd is nie.

Die waarde versameling van $f\left(\theta\right) = sin\left(\theta + p\right)$ is $\{f\left(\theta\right) : f\left(\theta\right) \in [-1, 1]\}$.

9.1.2.4.3 Afsnitte

Vir funksie van die vorm $y = sin\left(\theta + p\right)$, word die metode om die afsnitte met die y as te bereken gegee.

Die y-afsnit word bereken as volg: stel $\theta = 0°$

$$\begin{aligned} y &= sin\left(\theta + p\right) \\ y_{\text{afsnit}} &= sin\left(0 + p\right) \\ &= sin\left(p\right) \end{aligned} \quad (9.4)$$

9.1.2.5 Funksies van die vorm $y = cos\left(\theta + p\right)$

In die vergelyking $y = cos\left(\theta + p\right)$, is p 'n konstante en het verskillende effekte op die grafiek van die funksie. Die algemene vorm van die grafiek van hierdie soort funksies word gegee in Figure 9.13 for the function $f\left(\theta\right) = cos\left(\theta + 30^\circ\right)$.

Image not finished

Figure 9.13: Grafiek van $f\left(\theta\right) = cos\left(\theta + 30^\circ\right)$ (vastelyn) en die grafiek van $g\left(\theta\right) = cos\left(\theta\right)$ (stippellyn).

9.1.2.5.1 Funksies van die vorm $y = cos\left(\theta + p\right)$

Op dieselfde assestelsel, plot die volgende grafieke:

1. $a\left(\theta\right) = cos\left(\theta - 90^\circ\right)$
2. $b\left(\theta\right) = cos\left(\theta - 60^\circ\right)$
3. $c\left(\theta\right) = cos\theta$
4. $d\left(\theta\right) = cos\left(\theta + 90^\circ\right)$
5. $e\left(\theta\right) = cos\left(\theta + 180^\circ\right)$

Gebruik jou resultate om die effek van p af te lei.

Jy sal vind dat die waarde van p affekteer die y-afsnit en die fase skuif van die grafiek. Soos in die geval van die sinus grafiek, positiewe waardes van p skuif die cosinus grafiek links, terwyl negatiewe p waardes skuif die grafiek regs.

Die verskillende eienskappe word opgesom in Table 9.5.

$p > 0$	$p < 0$
Image not finished **Figure 9.14**	

Table 9.5: Tabel wat die algemene vorm en posisie van grafieke van funksies in die vorm $y = cos\left(\theta + p\right)$ opsom. Die kurwe $y = cos\theta$ is geplot met die 'n stippellyn.

9.1.2.5.2 Definisie versameling en Waarde versameling

Vir $f\left(\theta\right) = cos\left(\theta + p\right)$ is die definisie versameling $\{\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$, omdat daar geen waarde is van $\theta \in \mathbb{R}$ waarvoor $f\left(\theta\right)$ ongedefinieerd is nie.

Die waarde versameling van $f\left(\theta\right) = cos\left(\theta + p\right)$ is $\{f\left(\theta\right) : f\left(\theta\right) \in [-1, 1]\}$.

9.1.2.5.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm $y = cos\left(\theta + p\right)$, word die metode om die afsnit met die y as te kry gegee.

Die y-afsnite word bereken as volg: stel $\theta = 0°$

$$\begin{aligned} y &= cos\left(\theta + p\right) \\ y_{\text{afsnit}} &= cos\left(0 + p\right) \\ &= cos\left(p\right) \end{aligned} \quad (9.5)$$

9.1.2.6 Funksies van die vorm $y = tan\left(\theta + p\right)$

In die vergelyking $y = tan\left(\theta + p\right)$, is p 'n konstante en het verskeie effekte op die grafiek van die funksie. Die algemene vorm van grafieke van funksies in die vorm word gegee in Figure 9.16 for the function $f\left(\theta\right) = tan\left(\theta + 30°\right)$.

Image not finished

Figure 9.16: Die grafiek van $tan\left(\theta + 30°\right)$ (vastelyn) en die grafiek van $g\left(\theta\right) = tan\left(\theta\right)$ (stippellyn).

9.1.2.6.1 Funksies van die vorm $y = tan\left(\theta + p\right)$

Op dieselfde assestelsel, plot die volgende grafieke:

1. $a\left(\theta\right) = tan\left(\theta - 90°\right)$
2. $b\left(\theta\right) = tan\left(\theta - 60°\right)$
3. $c\left(\theta\right) = tan\theta$
4. $d\left(\theta\right) = tan\left(\theta + 60°\right)$
5. $e\left(\theta\right) = tan\left(\theta + 180°\right)$

Gebruik jou resultate om die effek van p af te lei.

Jy behoort te vind dat die waarde van p affekteer weereens die y-afsnit en die fase skuif van die grafiek. Daar is 'n horisontale skuif na links indien p positief is en na regs indien p negatief is.

Die verskillende eienskappe word opgesom in Table 9.6.

$k > 0$	$k < 0$
Image not finished **Figure 9.17**	

Table 9.6: Tabel wat die algemene vorm en posisie van grafieke van funksies in die vorm $y = tan\,(\theta + p)$ opsom. Die kurwe $y = tan\,(\theta)$ word geplot met 'n stippellyn.

9.1.2.6.2 Definisie versameling en Waade versameling

Vir $f\,(\theta) = tan\,(\theta + p)$ is die definisie versameling van een tak $\{\theta : \theta \in (-90^\circ - p, 90^\circ - p\}$, omdat die funksie ongedefinieerd is vir $\theta = -90^\circ - p$ en $\theta = 90^\circ - p$.

Die waarde versameling van $f\,(\theta) = tan\,(\theta + p)$ is $\{f\,(\theta) : f\,(\theta) \in (-\infty, \infty)\}$.

9.1.2.6.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm $y = tan\,(\theta + p)$ word die metode om die afsnitte met die y as te bereken gegee.

Die y-afsnit word as volg bereken: stel $\theta = 0^\circ$

$$\begin{aligned} y &= tan\,(\theta + p) \\ y_{\text{afsnit}} &= tan\,(p) \end{aligned} \tag{9.6}$$

9.1.2.6.4 Asimtote

Die grafiek van $tan\,(\theta + p)$ het asimtote, omdat soos $\theta + p$ 90° benader, benader $tan\,(\theta + p)$ oneindig. Daar is dus geen gedefinieerde waarde vir die funksie by die asimtoot waardes nie.

9.1.2.6.4.1 Funksies van verskillende vorms

Gebruik jou kennis van die effekte van p en k teken 'n rowwe skets van die volgende funksies, sonder om 'n tabel van waardes te gebruik.

1. $y = sin3x$
2. $y = -cos2x$
3. $y = tan\frac{1}{2}x$
4. $y = sin\,(x - 45^\circ)$
5. $y = cos\,(x + 45^\circ)$
6. $y = tan\,(x - 45^\circ)$
7. $y = 2sin2x$
8. $y = sin\,(x + 30^\circ) + 1$

9.2 Trig identiteite[2]

9.2.1 Trigonometriese Identiteite

9.2.1.1 Afleiding van Waardes vir Trigonometriese Funksies vir : 30°, 45° and 60°

Hou in gedagte dat die trigonometriese funksies slegs van toepassing is op reghoekige driehoeke. Dus kan ons waardes aflei vir trigonometriese funksies vir 30°, 45° en 60°. Ons sal begin met 45° omdat dit die maklikste is

Neem enige reghoekige driehoek met een hoek 45°. Dus omdat een hoek gelyk is aan 90°, moet die derde hoek ook gelyk wees aan 45°. Ons het dus 'n gelyksydige reghoekige driehoek soos aan gedui in Figure 9.19.

[2]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39188/1.1/>.

Image not finished

Figure 9.19: 'n Gelyksydige reghoekige driehoek

As die twee sye gelyk is in lengte aan a, dan kan die skuinssy h, soos volg bereken word:

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 + a^2 \\ &= 2a^2 \\ \therefore \quad h &= \sqrt{2}a \end{aligned} \tag{9.7}$$

Dus het ons:

$$\begin{aligned} sin\,(45^\circ) &= \frac{\text{teenoorstaande}(45^\circ)}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{9.8}$$

$$\begin{aligned} cos\,(45^\circ) &= \frac{\text{aanliggende}(45^\circ)}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{9.9}$$

$$\begin{aligned} tan\,(45^\circ) &= \frac{\text{teenoorstaande}(45^\circ)}{\text{aanliggende}(45^\circ)} \\ &= \frac{a}{a} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{9.10}$$

Ons kan iets soortgelyks probeer vir 30° en 60°. Ons begin met 'n gelyksydige driehoek en halveer een hoek soos aangedui in Figure 9.20. Dit gee ons die verlangde reghoekige driehoek met een hoek gelyk aan 30° en een hoek gelyk aan 60°.

Image not finished

Figure 9.20: 'n Gelyksydige driehoek met een hoek gehalveer.

As die gelyke sye se lengte gelyk is aan a, dan is die basis gelyk aan $\frac{1}{2}a$ en die lengte van die vertikale sy v kan dan soos volg bereken word:

$$\begin{aligned} v^2 &= a^2 - \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 \\ &= a^2 - \tfrac{1}{4}a^2 \\ &= \tfrac{3}{4}a^2 \\ \therefore \quad v &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}a \end{aligned} \tag{9.11}$$

Dus het ons:

$$\begin{aligned} sin\left(30^\circ\right) &= \frac{\text{teenoorstaande}(30^\circ)}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{\frac{a}{2}}{a} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{9.12}$$

$$\begin{aligned} cos\left(30^\circ\right) &= \frac{\text{aanliggende}(30^\circ)}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \tag{9.13}$$

$$\begin{aligned} tan\left(30^\circ\right) &= \frac{\text{teenoorstaande}(30^\circ)}{\text{aanliggende}(30^\circ)} \\ &= \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{9.14}$$

$$\begin{aligned} sin\left(60^\circ\right) &= \frac{\text{teenoorstaande}(60^\circ)}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \tag{9.15}$$

$$\begin{aligned} cos\left(60^\circ\right) &= \frac{\text{aanliggende}(60^\circ)}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{\frac{a}{2}}{a} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{9.16}$$

$$\begin{aligned} tan\left(60^\circ\right) &= \frac{\text{teenoorstaande}(60^\circ)}{\text{aanliggende}(60^\circ)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned} \tag{9.17}$$

Jy hoef nie hierdie identiteite te memoriseer nie as jy weet hoe om hulle af te lei.

TIP:

Figure 9.21

9.2.1.2 Alternatiewe definisie vir $tan\theta$

Ons weet dat $tan\theta$ soos volg gedefinieer word: $tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aanliggende}}$ Dit kan soos volg geskryf word:

$$\begin{aligned} tan\theta &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aanliggende}} \times \frac{\text{skuinssy}}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}} \times \frac{\text{skuinssy}}{\text{aanliggende}} \end{aligned} \tag{9.18}$$

Maar ons weet ook dat $sin\theta$ soos volg gedefinieer word: $sin\theta = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}}$ en dat $cos\theta$ soos volg gedefinieer word: $cos\theta = \frac{\text{aanliggende}}{\text{skuinssy}}$

Daarom kan ons dit soos volg skryf:

$$\begin{aligned} tan\theta &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}} \times \frac{\text{skuinssy}}{\text{aanliggende}} \\ &= sin\theta \times \frac{1}{cos\theta} \\ &= \frac{sin\theta}{cos\theta} \end{aligned} \quad (9.19)$$

TIP: $tan\theta$ kan ook soos volg gedefinieer word: $tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$

9.2.1.3 'n Trignometriese Identiteit

Een van die mees bruikbare resultate van die trigonometriese funksies is dat hulle verwant aan mekaar is. Ons het gesien dat $tan\theta$ geskryf kan word in terme van $sin\theta$ en $cos\theta$. Net so sal ons wys dat: $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

Ons begin deur te kyk na [U+25B5] ABC,

Image not finished

Figure 9.22

Ons sien dat: $sin\theta = \frac{AC}{BC}$ en $cos\theta = \frac{AB}{BC}$.

Volgens die stelling van Pythagoras weet ons dat: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Daarom kan ons die volgende neerskryf:

$$\begin{aligned} sin^2\theta + cos^2\theta &= \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 \\ &= \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} \\ &= \frac{AC^2+AB^2}{BC^2} \\ &= \frac{BC^2}{BC^2} \quad \text{(volgensPythagoras)} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (9.20)$$

Exercise 9.2.1: Trigonometriese Identiteite A *(Solution on p. 119.)*

Vereenvoudig deur identiteite te gebruik:

1. $tan^2\theta \cdot cos^2\theta$
2. $\frac{1}{cos^2\theta} - tan^2\theta$

Exercise 9.2.2: Trigonometriese Identiteite B *(Solution on p. 119.)*

Bewys: $\frac{1-sinx}{cosx} = \frac{cosx}{1+sinx}$

9.2.1.3.1 Trigonometriese identiteite

1. Vereenvoudig die volgende met behulp van die basiese trigonometriese identiteite:
   a. $\frac{cos\theta}{tan\theta}$
   b. $cos^2\theta.tan^2\theta \ + \ tan^2\theta.sin^2\theta$
   c. $1 - tan^2\theta.sin^2\theta$
   d. $1 - sin\theta.cos\theta.tan\theta$
   e. $1 - sin^2\theta$
   f. $\left(\frac{1-cos^2\theta}{cos^2\theta}\right) - cos^2\theta$
2. Bewys die volgende:
   a. $\frac{1+sin\theta}{cos\theta} = \frac{cos\theta}{1-sin\theta}$
   b. $sin^2\theta + (cos\theta - tan\theta)(cos\theta + tan\theta) = 1 - tan^2\theta$
   c. $\frac{(2cos^2\theta-1)}{1} + \frac{1}{(1+tan^2\theta)} = \frac{1-tan^2\theta}{1+tan^2\theta}$
   d. $\frac{1}{cos\theta} - \frac{cos\theta tan^2\theta}{1} = 1$
   e. $\frac{2sin\theta cos\theta}{sin\theta+cos\theta} = sin\theta + cos\theta - \frac{1}{sin\theta+cos\theta}$
   f. $\left(\frac{cos\theta}{sin\theta} + tan\theta\right) \cdot cos\theta = \frac{1}{sin\theta}$

9.3 Reduksieformule[3]

9.3.1 Reduksie Formule

Enige trigonometriese funksie wat se argument $90°\pm\theta$, $180°\pm\theta$, $270°\pm\theta$ is en $360°\pm\theta$ (dus $-\theta$) kan eenvoudig geskryf word in terme van θ. Byvoorbeeld, jy kon opgemerk het dat die cosinus-grafiek identies is aan die sinus-grafiek behalwe vir 'n fase verskuiwing van 90°. Dit kan dus afgelei word dat $sin\,(90° + \theta) = cos\theta$.

9.3.1.1 Funksie waardes van $180° \pm \theta$

9.3.1.1.1 Ondersoek : Reduksie Formules vir Funksie Waardes van $180° \pm \theta$

1. **Funksie Waardes van** $(180° - \theta)$
   a. In die figuur lê P en P' op die sirkel met radius 2. OP vorm 'n hoek $\theta = 30°$ met die x-as. P het dus die koördinate $(\sqrt{3};1)$. As P' die refleksie van P om die y-as (of die lyn $x = 0$) is, gebruik simmetrie om die koördinate van P' neer te skryf.
   b. Gee waardes vir $sin\theta$, $cos\theta$ en $tan\theta$.
   c. Deur gebruik te maak van die koördinate van P' bepaal: $sin\,(180° - \theta)$, $cos\,(180° - \theta)$ en $tan\,(180° - \theta)$.

Image not finished

Figure 9.23

   a. Probeer om uit die resultate 'n verhouding tussen die funksie waardes van $(180° - \theta)$ en θ te bepaal.

[3]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39211/1.1/>.

2. **Funksie waardes van** $(180^\circ + \theta)$
   a. In die figuur lê P en P' op die sirkel met radius 2. OP vorm 'n hoek $\theta = 30^\circ$ met die x-as. P het dus die koördinate $\left(\sqrt{3};1\right)$. As P' die refleksie van P om die y-as (of die lyn $x = 0$) is, gebruik simmetrie om die koördinate van P' neer te skryf.
   b. Gee waardes vir $sin\theta$, $cos\theta$ en $tan\theta$.
   c. Deur gebruik te maak van die koördinate van P' bepaal: $sin\,(180^\circ + \theta)$, $cos\,(180^\circ + \theta)$ en $tan\,(180^\circ + \theta)$.

Image not finished

Figure 9.24

9.3.1.1.2 Ondersoek: Reduksie Formules vir Funksie Waardes van $360^\circ \pm \theta$

1. **Funksie waardes van** $(360^\circ - \theta)$
   a. In die figuur lê P en P' op die sirkel met radius 2. OP vorm 'n hoek $\theta = 30^\circ$ met die x-as. P het dus die koördinate $\left(\sqrt{3};1\right)$. As P' die refleksie van P om die y-as (of die lyn $x = 0$) is, gebruik simmetrie om die koördinate van P' neer te skryf.
   b. Gee waardes vir $sin\theta$, $cos\theta$ en $tan\theta$.
   c. Deur gebruik te maak van die koördinate van P' bepaal: $sin\,(360^\circ - \theta)$, $cos\,(360^\circ - \theta)$ en $tan\,(360^\circ - \theta)$.

Image not finished

Figure 9.25

Dit is moontlik om 'n hoek groter as 360° te hê. Die hoek voltooi een omwenteling van 360° en dan gaan dit voort om die vereiste hoek te gee. Ons kry die volgende resultate:

$$\begin{aligned} sin\,(360^\circ + \theta) &= sin\theta \\ cos\,(360^\circ + \theta) &= cos\theta \\ tan\,(360^\circ + \theta) &= tan\theta \end{aligned} \tag{9.21}$$

Neem ook kennis, dat as k enige heelgetal is, dan is

$$\begin{aligned} sin\,(k360^\circ + \theta) &= sin\theta \\ cos\,(k360^\circ + \theta) &= cos\theta \\ tan\,(k360^\circ + \theta) &= tan\theta \end{aligned} \tag{9.22}$$

Exercise 9.3.1: Basiese gebruik van 'n reduksie formule *(Solution on p. 119.)*
Skryf $sin293^\circ$ as die funksie van 'n skerphoek.

Exercise 9.3.2: Meer gevorderd... *(Solution on p. 119.)*
Evalueer sonder 'n sakrekenaar:

$$tan^2 210° - (1 + cos 120°)\, sin^2 225° \tag{9.23}$$

9.3.1.1.3 Reduksie Formules

1. Skryf hierdie vergelykings as 'n funksie van slegs θ:
   a. $sin\,(180° - \theta)$
   b. $cos\,(180° - \theta)$
   c. $cos\,(360° - \theta)$
   d. $cos\,(360° + \theta)$
   e. $tan\,(180° - \theta)$
   f. $cos\,(360° + \theta)$
2. Skryf die volgende trig funksies as 'n funksie van' n skerphoek:
   a. $sin 163°$
   b. $cos 327°$
   c. $tan 248°$
   d. $cos 213°$
3. Bepaal die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:
   a. $tan\ 150°.sin\ 30°\ +\ cos\ 330°$
   b. $tan\ 300°.cos\ 120°$
   c. $(1 - cos\ 30°)\,(1 - sin\ 210°)$
   d. $cos\ 780°\ +\ sin\ 315°.tan\ 420°$
4. Bepaal die volgende deur dit te herlei na 'n skerphoek en met behulp van spesiale hoeke. Moenie 'n sakrekenaar gebruik nie:
   a. $cos\ 300°$
   b. $sin\ 135°$
   c. $cos\ 150°$
   d. $tan\ 330°$
   e. $sin\ 120°$
   f. $tan^2 225°$
   g. $cos\ 315°$
   h. $sin^2 420°$
   i. $tan\ 405°$
   j. $cos\ 1020°$
   k. $tan^2 135°$
   l. $1 - sin^2 210°$

9.3.1.2 Funksie Waardes van $(-\theta)$

Wanneer die argument van 'n trigonometriese funksie $(-\theta)$ is kan 360° by voeg sonder om die resultaat te verander. So vir sinus en kosinus het ons

$$sin\,(-\theta) = sin\,(360° - \theta) = -sin\theta \tag{9.24}$$

$$cos\left(-\theta\right) = cos\left(360^\circ - \theta\right) = cos\theta \tag{9.25}$$

9.3.1.3 Funksie Waardes van $90^\circ \pm \theta$

9.3.1.3.1 Ondersoek: Reduksie Formules vir Funksie Waardes van $90^\circ \pm \theta$

1. **Funksie waardes van** $\left(90^\circ - \theta\right)$
   a. In die figuur lê P en P' op die sirkel met radius 2. OP vorm 'n hoek $\theta = 30^\circ$ met die x-as. P het dus die koördinate $\left(\sqrt{3};1\right)$. As P' die refleksie van P om die y-as (of die lyn $x = 0$) is, gebruik simmetrie om die koördinate van P' neer te skryf.
   b. Gee waardes vir $sin\theta$, $cos\theta$ en $tan\theta$.
   c. Deur gebruik te maak van die koördinate van P' bepaal: $sin\left(90^\circ - \theta\right)$, $cos\left(90^\circ - \theta\right)$ en $tan\left(90^\circ - \theta\right)$.

Image not finished

Figure 9.26

2. **Funksie waardes van** $\left(90^\circ + \theta\right)$
   a. In die figuur lê P en P' op die sirkel met radius 2. OP vorm 'n hoek $\theta = 30^\circ$ met die x-as. P het dus die koördinate $\left(\sqrt{3};1\right)$. As P' die refleksie van P om die y-as (of die lyn $x = 0$) is, gebruik simmetrie om die koördinate van P' neer te skryf.
   b. Gee waardes vir $sin\theta$, $cos\theta$ en $tan\theta$.
   c. Deur gebruik te maak van die koördinate van P' bepaal: $sin\left(90^\circ + \theta\right)$, $cos\left(90^\circ + \theta\right)$ en $tan\left(90^\circ + \theta\right)$.

Image not finished

Figure 9.27

Komplementêre hoeke is positiewe skerphoeke wat gelyk is aan 90°. Bv. 20° en 70° is komplimentere hoeke.

Sinus en kosinus staan bekend as **ko-funksies**. Twee funksies word ko-funksies genoem indien $f\left(A\right) = g\left(B\right)$ whenever $A + B = 90^\circ$ (m.a.w. A en B is komplimentere hoeke). Die ander trig ko-funksies is secans en cosecans, en die tangens en cotangens.

Die funksie waarde van 'n hoek is gelyk aan die ko-funksie van sy komplement (die ko-ko-reël).

Dus het ons vir sinus en kosinus as

$$\begin{aligned} sin\left(90^\circ - \theta\right) &= cos\theta \\ cos\left(90^\circ - \theta\right) &= sin\theta \end{aligned} \tag{9.26}$$

Exercise 9.3.3: Ko-Ko-reël *(Solution on p. 119.)*

Skryf elk van die volgende in terme van 40° deur gebruik te maak van $sin\,(90^\circ - \theta) = cos\theta$ en $cos\,(90^\circ - \theta) = sin\theta$.

1. $cos50^\circ$
2. $sin320^\circ$
3. $cos230^\circ$

9.3.1.4 Funksie Waardes van $(\theta - 90^\circ)$

$sin\,(\theta - 90^\circ) = -cos\theta$ and $cos\,(\theta - 90^\circ) = sin\theta$.

Hierdie resultate kan as volg bewys word:

$$\begin{aligned} sin\,(\theta - 90^\circ) &= sin\,[-(90^\circ - \theta)] \\ &= -sin\,(90^\circ - \theta) \\ &= -cos\theta \end{aligned} \quad (9.27)$$

en so ook vir $cos\,(\theta - 90^\circ) = sin\theta$

9.3.1.5 Opsomming

Die volgende opsomming kan gemaak word

tweede kwadrant $(180^\circ - \theta)$ **or** $(90^\circ + \theta)$	**eerste kwadrant** (θ) **or** $(90^\circ - \theta)$
$sin\,(180^\circ - \theta) = +sin\theta$	alle trig funksies is positief
$cos\,(180^\circ - \theta) = -cos\theta$	$sin\,(360^\circ + \theta) = sin\theta$
$tan\,(180^\circ - \theta) = -tan\theta$	$cos\,(360^\circ + \theta) = cos\theta$
$sin\,(90^\circ + \theta) = +cos\theta$	$tan\,(360^\circ + \theta) = tan\theta$
$cos\,(90^\circ + \theta) = -sin\theta$	$sin\,(90^\circ - \theta) = sin\theta$
	$cos\,(90^\circ - \theta) = cos\theta$
derde kwadrant $(180^\circ + \theta)$	**vierde kwadrant** $(360^\circ - \theta)$
$sin\,(180^\circ + \theta) = -sin\theta$	$sin\,(360^\circ - \theta) = -sin\theta$
$cos\,(180^\circ + \theta) = -cos\theta$	$cos\,(360^\circ - \theta) = +cos\theta$
$tan\,(180^\circ + \theta) = +tan\theta$	$tan\,(360^\circ - \theta) = -tan\theta$

Table 9.7

TIP:

1. Hierdie reduksie formules geld vir enige hoek θ. Vir gerief, werk ons gewoonlik met θ asof dit 'n skerphoek is, m.a.w. $0^\circ < \theta < 90^\circ$.
2. By die bepaling van die funksie waardes van $180^\circ \pm \theta$, $360^\circ \pm \theta$ and $-\theta$ verander die funksies nooit.
3. By die bepaling van die funksie waardes van $90^\circ \pm \theta$ and $\theta - 90^\circ$ verander die funksies na sy ko-funksies (ko-ko-reel).

9.3.1.5.1 Funksie Waardes van $(270° \pm \theta)$

Hoeke in die derde en vierde kwadrante kan geskryf word as $270° \pm \theta$ met θ 'n skerphoek. Soortgelyke reëls as bogenoemde is van toepassing. Ons kry

derde kwadrant $(270° - \theta)$	**vierde kwadrant** $(270° + \theta)$
$sin\,(270° - \theta) = -cos\theta$	$sin\,(270° + \theta) = -cos\theta$
$cos\,(270° - \theta) = -sin\theta$	$cos\,(270° + \theta) = +sin\theta$

Table 9.8

Solutions to Exercises in Chapter 9

Solution to Exercise 9.2.1 (p. 112)

Step 1.

$$\begin{aligned} &= tan^2\theta \cdot cos^2\theta \\ &= \frac{sin^2\theta}{cos^2\theta} \cdot cos^2\theta \\ &= sin^2\theta \end{aligned} \quad (9.28)$$

Step 2.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{cos^2\theta} - tan^2\theta \\ &= \frac{1}{cos^2\theta} - \frac{sin^2\theta}{cos^2\theta} \\ &= \frac{1-sin^2\theta}{cos^2\theta} \\ &= \frac{cos^2\theta}{cos^2\theta} = 1 \end{aligned} \quad (9.29)$$

Solution to Exercise 9.2.2 (p. 112)

Step 1.

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{1-sinx}{cosx} \\ &= \frac{1-sinx}{cosx} \times \frac{1+sinx}{1+sinx} \\ &= \frac{1-sin^2x}{cosx(1+sinx)} \\ &= \frac{cos^2x}{cosx(1+sinx)} \\ &= \frac{cosx}{1+sinx} = \text{RHS} \end{aligned} \quad (9.30)$$

Solution to Exercise 9.3.1 (p. 114)

Step 1.

$$\begin{aligned} sin293^\circ &= sin\left(360^\circ - 67^\circ\right) \\ &= -sin67^\circ \end{aligned} \quad (9.31)$$

waar ons die feit gebruik het dat $sin\left(360^\circ - \theta\right) = -sin\theta$. Toets, met behulp van jou sakrekenaar, dat hierdie waardes wel reg is:

$$\begin{aligned} sin293^\circ &= -0,92\cdots \\ -sin67^\circ &= -0,92\cdots \end{aligned} \quad (9.32)$$

Solution to Exercise 9.3.2 (p. 115)

Step 1.

$$\begin{aligned} & tan^2 210^\circ - \left(1 + cos120^\circ\right) sin^2 225^\circ \\ &= \left[tan\left(180^\circ + 30^\circ\right)\right]^2 - \left[1 + cos\left(180^\circ - 60^\circ\right)\right] \cdot \left[sin\left(180^\circ + 45^\circ\right)\right]^2 \\ &= \left(tan30^\circ\right)^2 - \left[1 + \left(-cos60^\circ\right)\right] \cdot \left(-sin45^\circ\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{aligned} \quad (9.33)$$

Solution to Exercise 9.3.3 (p. 116)

Step 1.

a. $cos50° = cos\,(90° - 40°) = sin40°$

b. $sin320° = sin\,(360° - 40°) = -sin40°$

c. $cos230° = cos\,(180° + 50°) = -cos50° = -cos\,(90° - 40°) = -sin40°$

Chapter 10

Statistiek

10.1 Standaardafwyking en variansie[1]

10.1.1 Inleiding

Hierdie hoofstuk gee jou die geleentheid om te bou op wat jy in die vorige grade geleer het oor data hantering en waarskynlikheid. Die werk sal meestal prakties van aard wees. Deur probleemoplossing en aktiwiteite, sal jy die tegnieke van saamstel, organiseer, vertoon en analisering van data bemeester. Jy sal ook leer hoe om data te interpreteer en om die data krities te kan beoordeel en nie op sigwaarde te beoordeel nie. Dit is belangrik, aangesien data somtyds wangebruik en misbruik word om verkeerdelik standpunte te bewys of ondersteun. Mates van sentrale geneigdheid (gemiddeld, mediaan en modus) en dispersie (strekking, persentiel, kwartiel, inter-kwartiel, semi-inter-kwartiel strekking, variansie en standaard afwyking) sal ondersoek word. Natuurlik sal die meeste van julle bekend wees met die waarskynlikheidsaktiwiteite – julle het byvoorbeeld al dobbelsteenspeletjies en kaartspeletjies gespeel. Jou basiese verstaan van waarskynlikheid en kans sal verdiep word om ook te verstaan hoe dit gebruik kan word.

10.1.2 Standaard Afwyking en Variansie

Die mate van sentrale geneigdheid (gemiddeld, mediaan en modus) en mate van dispersie (kwartiele, persentiele, strekking) verskaf inligting van die data waardes by die middel van die datastel en verskaf inligting oor die verspreiding van die data. Die inligting van die verspreiding is egter gebaseer op data waardes by spesifieke punte in die datastel. Byvoorbeeld die eindpunte is die strekking en die datapunte wat die stel in vier ewe groot groepe opdeel gee die kwartiele. Die gedrag van die hele datastel word dus nie hiervoor beoordeel nie.

Een metode wat ‘n aanduiding te gee van die verspreiding in ‘n datastel is is om te bereken wat die verskil is tussen die datapunte en die gemiddeld. Die twee belangrike maatstawwe wat gebruik word, is die *variansie* en die *standaard afwyking* van die data stel.

10.1.2.1 Variansie

Die variansie van ‘n datastel is die gemiddeld van die kwadraat van die verskil tussen elke datapunt en die gemiddeld. ‘n voorbeeld van wat hierdie beteken word gewys in Figure 10.1. Die grafiek verteenwoordig die resultaat van 100 keer se skiet van ‘n muntstuk, wat op 45 kop en 55 stert uitslae uitgeloop het. Die gemiddeld van die resultaat is 50 (helfte van 100). Die kwadraat van die verskil tussen die kop waardes en die gemiddeld is $(45-50)^2=25$ en die kwadraat van die verskil tussen die stert waardes en die gemiddeld is $(55-50)^2=25$. Die gemiddeld van hierdie twee kwadratiese verskille gee die variansie $\frac{1}{2}(25+25)=25$.

[1] This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39153/1.1/>.

Image not finished

Figure 10.1

10.1.2.1.1 Populasie Variansie

Laat die populasie bestaan uit n elemente $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, met gemiddeld $\overline{x}$ (lees as "x streep"). Die variansie van die populasie, aangedui met σ^2, is die gemiddeld van die kwadraat van die verskil tussen elke datapunt en die gemiddeld.

$$\sigma^2 = \frac{\left(\sum (x - \overline{x})\right)^2}{n}. \tag{10.1}$$

Aangesien die populasie variansie kwadreer word, is dit nie direk vergelykbaar met die gemiddeld nie, en ook nie met die datapunte nie.

10.1.2.1.2 Steekproef Variansie

Laat die steekproef bestaan uit die n elemente$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, geneem van 'n populasie, met gemiddeld $\overline{x}$. Die variansie van die steekproef, aangedui met s^2, is die gemiddeld van die kwadraat van die afwykings van die steekproef gemiddeld:

$$s^2 = \frac{\sum (x - \overline{x})^2}{n - 1}. \tag{10.2}$$

Aangesien die steekproef kwadreer word, is dit ook nie direk vergelykbaar met die gemiddeld en die datapunte self nie.

'n Algemene vraag op hierdie stadium is "Hoekom word die teller gekwadreer? Een aantwoord is: om ontslae te raak van die negatiewe tekens. Sommige punte gaan bo die gemiddeld wees en ander odner die gemiddeld. Dit sal teenproduktief wees om as hierdie positiewe en negateiewe verskille mekaar uitkanselleer.

10.1.2.1.3 Verskil tussen Populasie Variansie en Steekproef Variansie

Dit is duidelik dat daar onderskeid getref word tussen variansie σ^2, van 'n hele populasie en die variansie s^2 van 'n steekproef van die populasie.

Wanneer daar met die hele populasie gewerk word is variansie 'n konstante, 'n parameter wat help om die hele populasie te beskryf. Wanneer daar met die steekproef van die populasie gewerk word varieer die variansie van steekproef tot steekproef. die steekproef variansie is slegs van belang as 'n benadering of skatting van die populasie variansie.

10.1.2.1.4 Eienskappe van Variansie

Die variansie is nooit negatief nie aangesien die kwadratiese terme of nul of positief is. Die eenheid van variansie is die kwadraat van die eenheid van observasie. Byvoorbeeld, die variansie van 'n datastel van hoogtes gemeet in sentimeters sal vierkante sentimeter wees. Dit is 'n ongerieflike eienskap en statistici kies om eerder die vierkantswortel van die variansie gebruik, wat algemeen bekend staan as die Standaard Afwyking en gebruik word as maatstaf van verspreiding.

10.1.2.2 Standaard Afwyking

Aangesien die variansie 'n kwadratiese hoeveelheid is kan dit nie direk vergelyk word met die data waardes en die gemiddeld nie. Dit is daarom meer sinvol om 'n hoeveelheid te gebruik wat die vierkantswortel is die variansie. Hierdie hoeveelheid staan bekend as die standaard afwyking.

In statistiek is die standaard afwyking die mees algemene maatstaf van statistiese verspreiding. Standaard afwyking meet hoe uitgesprei die waardes in 'n datastel is. Dit is 'n maatstaf van die gemiddelde verskil tussen die waardes in 'n datastel en die gemiddeld van die datastel. Indien die waarders soortgelyk (naby aan mekaar) is sal die standaard afwyking laag wees (nader aan nul wees). Indien die waardes beduidend verskillend (verder van mekaar) is sal die standaard afwyking hoog wees (verder van nul).

Die standaard afwyking is altyd positief en word in die selfde eenheid gemeet as die oorspronklike data. Byvoorbeeld, indien die data in meters gemeet is, sal die standaard afwyking ook in meters gemeet wees.

10.1.2.2.1 Populasie Standaard Afwyking

Laat die populasie bestaan uit n elemente $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, met gemiddeld $\overline{x}$. Due standaard afwyking van die populasie, aangedui met σ, is die vierkantswortel van die gemiddeld van die kwadraat van die verskil tussen elke data punt en die gemiddeld.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \overline{x})^2}{n}} \tag{10.3}$$

10.1.2.2.2 Steekproef Standaard Afwyking

Laat die steekproef bestaan uit n elemente $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, geneem van 'n populasie met gemiddeld $\overline{x}$. Die standaard afwyking van die steekproef, aangedui met s, is die vierkantswortel van die gemiddeld van die kwadraat van die afwykings van die steekproef gemiddeld:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \overline{x})^2}{n - 1}} \tag{10.4}$$

Dit is gewoonlik nuttig om die data in 'n tabel te plaas om sodoende die formules maklik te gebruil. Om byvoorbeeld die standaard afwyking te bereken van $\{57; 53; 58; 65; 48; 50; 66; 51\}$, kan jy dit op die volgende manier voorstel:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\text{som van die elemente}}{\text{hoeveelheid elemente}} \\ &= \frac{\sum x}{n} \\ &= \frac{448}{8} \\ &= 56 \end{aligned} \tag{10.5}$$

Note: Om die afwykings te kry, trek elke getal ad van die gemiddeld.

$\overline{X}$	**Afwyking** $\left(X-\overline{X}\right)$	**Afwyking kwadraat** $\left(X-\overline{X}\right)^2$
57	1	1
53	-3	9
58	2	4
65	9	81
48	-8	64
50	-6	36
66	10	100
51	-5	25
$\sum X=448$	$\sum x=0$	$\sum\left(X-\overline{X}\right)^2=320$

Table 10.1

Note: Die som van die afwykings van om die gemiddeld is nul. Dit sal altyd die geval wees dat $\left(X-\overline{X}\right)=0$, vir enige datastel. Verstaan jy hoekom?

Bereken die variansie (tel die kwadratiese resultate bymekaar en deel dit deur die hoeveelheid elemente).

$$\begin{aligned}\textbf{Variance} &= \frac{\sum\left(X-\overline{X}\right)^2}{n}\\ &= \frac{320}{8}\\ &= 40\end{aligned} \tag{10.6}$$

$$\begin{aligned}\textbf{Standaard Afwyking} &= \sqrt{\text{variance}}\\ &= \sqrt{\frac{\sum\left(X-\overline{X}\right)^2}{n}}\\ &= \sqrt{\frac{320}{8}}\\ &= \sqrt{40}\\ &= 6.32\end{aligned} \tag{10.7}$$

10.1.2.2.3 Die verskil tussen Populasie Variansie en Steekproef Variansie

Soos met variansie, tref ons onderskeid tussen standaard afwyking σ, van ‘n hele populasie en standaard afwyking, s, van ‘n steekproef onttrek vanuit die hele populasie.

Wanneer ons met die hele populasie werk is die (populasie) standaard afwyking ‘n konstante wat help om die populasie te beskryf. Wanneer ons met ‘n steekproef van die populasie werk verskil die (steekproef) standaard afwyking van steekproef tot steekproef.

Met ander woorde: Die standaard afwyking kan as volg bereken word:

1. Bereken die gemiddelde waarde $\overline{x}$.
2. Vir elke data waarde x_i bereken die verskil $x_i-\overline{x}$ tussen x_i en die gemiddelde waarde $\overline{x}$.
3. Bereken die kwadraat van hierdie verskille.
4. Vind die gemiddeld van die kwadratiese verskille. Hierdie hoeveelheid is die variansie, σ^2.
5. Neem die vierkantswortel van die variansie om die standaard afwyking te verkry., σ.

Khan academy video on standard deviation

This media object is a Flash object. Please view or download it at
<http://www.youtube.com/v/HvDqbzu0i0E&rel=0&hl=en_US&feature=player_embedded&version=3>

Figure 10.2

Exercise 10.1.1: Variansie and Standaard Afwyking *(Solution on p. 138.)*
Wat is die variansie en standaard afwyking van die populasie van die moontlikehede wat met ‘n regverdige dobbelsteen assosieer word?

10.1.2.3 Interpretasie en Toepassings

’n Groot standaard afwykingdui aan dat die waardes in die datastel ver is van die gemiddeld en ‘n klein standaard afwyking dui aan hulle gegroepeer is naby aan die gemiddeld.

Byvoorbeeld,elk van die drie steekproewe (0, 0, 14, 14), (0, 6, 8, 14), en (6, 6, 8, 8) het afsonderlik ‘n gemiddeld van 7. Die standaard afwykings is afsonderlik 8.08, 5.77 en 1.15. Die derde stel het ‘n veel kleiner standaard afwyking as die ander twee omdat die elemente nader aan 7 is. Die waarde van die standaard afwyking kan slegs evalueer word as groot of klein relatief tot die steekproef wat geneem word. In hierdie geval, is ‘n standaard afwyking van 7 taamlik groot. Gegewe ‘n ander steekproef, relatief klein gewees het.

Standaard afwyking kan gesien word as die mate van onsekerheid. In die Wetenskap byvoorbeeld, sal dia standaard afwyking van die resultate van ‘n herhaalde eksperiment aandui hoe presies die metings was. Wanneer daar besluit word of metings ooreenstem met ‘n teoretiese voorspelling, is die standaard afwyking van uiterste belang: Indien die gemiddeld van die meetings te ver weg is van die voorspelling (met “afstand” gemeet in standaard afwykings), is die metings teenstrydig met die voorspelling. Dit maak sin omdat hulle buite die strekking van waardes val wat redelik verwag kan word indien die voorspelling korrek was, en die standaard afwyking ooreenstemmend bereken is. (Kyk ook na voorspellingsinterval.)

10.1.2.4 Verhouding tussen Standaard Afwyking en die Gemiddeld

Die gemiddeld en die standaard afwyking van ‘n datastel word gewoonlik saam gegee. In ‘n sekere sin, is die standaard afwyking ‘n “natuurlike” maatstaf van statistiese dispersie indien die middel van die data stel om die gemiddeld gemeet word.

10.1.2.4.1 Gemiddeld en standaard afwykings

1. Bridget het ‘n opname gemaak van die prys van petrol by vulstasies in Kaapstad en Durban. Die rou data, in rand per liter word hier onder gegee:

Kaapstad	8,96	8,76	9,00	8,91	8,69	8,72
Durban	8,97	8,81	8,52	9,08	8,88	8,68

Table 10.2

a. Vind die data gemiddelde prys in elke stad en bepaal dan watter een het die laagste gemiddeld.
b. Neem aan dat die data die hele populasie is. Vind die standaard afwyking vir die pryse in elke stad.
c. Neem aan die data is ‘n steekproef en vind die standaard afwyking vir die pryse in elke stad.

d. Watter stad het meer konsekwente pryse vir petrol?

2. Die volgende data verteenwoordig die sakgeld vir 'n steekproef van tieners. 150; 300; 250; 270; 130; 80; 700; 500; 200; 220; 110; 320; 420; 140. Wat is die standaard afwyking?
3. Gestel 'n datastel gee die gewig van 50 katte by 'n skou.
   a. Wanneer word die data gesien as 'n populasie?
   b. Wanneer word die data gesien as 'n steekproef?
4. Gestel 'n datastel gee die resultate van 20 studente in 'n klas.
   a. Wanneer word die data gesien as 'n populasie?
   b. Wanneer word die data gesien as 'n steekproef?

10.2 Grafiese voorstelling van data[2]

10.2.1 Grafiese Voorstelling van Meeting van Sentrale Neiging en Verspreiding

Die maatstawwe van sentrale neiging (gemiddelde, mediaan, modus) en die bepalers van verspreiding (reeks, semi-inter-kwartielreeks, kwartiele, persentiele, inter-kwartielreeks) is numeriese metodes om data op te som. Hierdie afdeling bied metodes wat die opgesomde data met behulp van grafieke voorstel.

10.2.1.1 Vyf-Getal Opsomming

Een metode om data voor te stel is met behulp van 'n *vyf-getal opsomming*. Die vyf getalle is: minimum, eerste kwartiel, mediaan, derde kwartiel en maksimum.

10.2.1.2 Houer-en-Puntdiagram

'n *Houer-en-puntdiagram* is 'n metode om die vyf-getal opsomming grafies voor te stel.

Die hoof eienskappe van 'n houer-en-puntdiagram word getoon in Figure 10.3. Die boks kan horisontaal lê (soos aangedui) of vertikaal. Vir 'n horisontale diagram, is die linkerkant van die boks geplaas by die eerste kwartiel en die regter kant van die boks is geplaas op die derde kwartiel. Die hoogte van die boks is arbitrêr, want daar is geen y-as. Binne-in die boks word die maatstawwe van sentrale neiging aangedui. Die mediaan word getoon met 'n vertikale lyn wat die boks in twee deel. Die gemiddeld word as 'n sterretjie aangeduien die minimum en maksimum waardes word met reguit lyne verbind aan die houer.

Image not finished

Figure 10.3

Exercise 10.2.1: Houer-en-Puntdiagram *(Solution on p. 138.)*

Teken 'n houer-en-puntdiagram vir die datastel
$x = \{1,25; 1,5; 2,5; 2,5; 3,1; 3,2; 4,1; 4,25; 4,75; 4,8; 4,95; 5,1\}$.

[2]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39268/1.1/>.

Khan academy video oor houer-en-puntdiagramme

This media object is a Flash object. Please view or download it at
<http://www.youtube.com/v/BXq5TFLvsVw&rel=0&hl=en_US&feature=player_embedded&version=3>

Figure 10.4

10.2.1.2.1 Houer-en-puntdiagram

1. Lisa werk as 'n Televerkope persoon. Sy hou 'n rekord van die getal verkope wat sy elke maand maak. Die data hieronder toon hoeveel sy elke maand verkoop. **49; 12; 22; 35; 2; 45; 60; 48; 19; 1; 43; 12** Gee 'n vyf-getal opsomming en 'n hour-en-puntdiagram van haar verkope.
2. Jason werk in 'n rekenaar winkel. Hy verkoop die volgende aantal rekenaars per maand: **27; 39; 3; 15; 43; 27; 19; 54; 65; 23; 45; 16** Gee 'n vyf-getal opsomming en 'n hour-en-puntdiagram van sy verkope,
3. Die getal van rugby wedstryde bygewoon deur 36 seisoen kaartjie houers is soos volg: **15; 11; 7; 34; 24; 22; 31; 12; 912; 9; 1; 3; 15; 5; 8; 11; 225; 2; 6; 18; 16; 17; 20; 13; 1714; 13; 11; 5; 3; 2; 23; 26; 40**
   a. Sommeer die data.
   b. Stel die data voor met behulp van 'n gepaste grafiese metode (gee redes).
   c. Bepaal die mediaan, modus en gemiddelde.
   d. Bereken die vyf-getal opsomming en maak 'n houer-en-puntdiagram.
   e. Wat is die variansie en standaardafwyking?
   f. Lewer kommentaar op die verspreiding van die data.
   g. Waar word 95% van die resultate verwag om te lê?
4. Rose het vir nege maande in 'n bloemistewinkel gewerk. Sy verkoop die volgende aantal trou ruikers: **16; 14; 8; 12; 6; 5; 3; 5; 7**
   a. Wat is die vyf-getal opsomming van die data?
   b. Aangesien daar 'n onewe aantal datapunte is, wat neem jy waar by die berekening van die vyf-getal opsomming?

10.2.1.3 Kumulatiewe Histogramme

Kumulatiewe histogramme, ook bekend as ogiewe, is 'n plot van kumulatiewe frekwensies en word gebruik om te bepaal hoeveel data waardes lê bo of onder 'n spesifieke waarde in 'n datastel. Die kumulatiewe frekwensie word bereken vanaf 'n frekwensie-tabel, deur die toevoeging van elke frekwensie van die totale van die frekwensies van al die data waardes voor dit in die datastel. Die laaste waarde vir die kumulatiewe frekwensie sal altyd gelyk wees aan die totale getal van data waardes, aangesien alle frekwensies reeds na die vorige totaal bygevoeg. Die kumulatiewe frekwensie is geplot by die boonste grens van die interval.

Die kumulatiewe frekwensies van Data Stel 2 word as in voorbeeld vertoon in Table 10.3 en grafies voorgestel in .

Intervalle	$0 < n \leq 1$	$1 < n \leq 2$	$2 < n \leq 3$	$3 < n \leq 4$	$4 < n \leq 5$	$5 < n \leq 6$
Frekwensie	30	32	35	34	37	32
Kumulatiewe Frekwensies	30	30 + 32	30 + 32 + 35	30 + 32 + 35 + 34	30 + 32 + 35 + 34 + 37	30 + 32 + 35 + 34 + 37 + 32
	30	62	97	131	168	200

Table 10.3: Kumulatiewe Frekwensies vir Data Stel 2.

Image not finished

Figure 10.5

Let op dat die frekwensies by die boonste limiet van die interval geplot word. Die punte (30;1) (62;2) (97;3) is dus geplot. Dit verskil van die frekwensieveelhoek waar ons frekwensies by die middelpunte van die intervalle plot.

10.2.1.3.1 Intervalle

1. Gebruik die volgende inligting van mense se ouderdomme om die vrae te beantwoord. 2; 5; 1; 76; 34; 23; 65; 22; 63; 45; 53; 38 4; 28; 5; 73; 80; 17; 15; 5; 34; 37; 45; 56
    a. Met behulp van 'n interval breedte van 10 bou 'n kumulatiewe frekwensietabel
    b. Hoeveel is onder 30?
    c. Hoeveel is onder 60?
    d. Onder watter waarde val 50% van die ouderdomme? Gee 'n verduideliking.
    e. Onder watter waarde val die onderste 40%?
    f. Konstrueer 'n frekwensieveelhoek en 'n ogief.
    g. Vergelyk die twee grafieke.
2. Die gewig van sakke sand in gram word hieronder gegee word (afgerond tot die naaste tiende): 50,1; 40,4; 48,5; 29,4; 50,2; 55,3; 58,1; 35,3; 54,2; 43,5 60,1; 43,9; 45,3; 49,2; 36,6; 31,5; 63,1; 49,3; 43,4; 54,1
    a. Besluit op 'n interval breedte en toon wat jy waarneem oor oor jou keuse.
    b. Gee jou laagste interval.
    c. Gee jou hoogste interval.
    d. Konstrueer 'n cumultative frekwensie grafiek en 'n frekwensieveelhoek
    e. Vergelyk hierdie twee grafieke.
    f. Onder watter waarde val 53% van die gevalle?
    g. Onder watter waarde val 60% van die gevalle?

10.3 Die verspreiding van die data[3]

10.3.1 Verspreiding van data

10.3.1.1 Simmetries en Skewe Data

Die vorm van 'n data stel is belangrik om te weet.

[3]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39197/1.1/>.

Definisie 10.1: Vorm van 'n data stel
Hierdie beskryf hoe die data versprei is relatief tot die gemiddelde en die mediaan.

- Simmetriese data is gebalanseer op beide kante van die mediaan.



Figuur 10.6

- Data wat skeef is, is versprei op een kant meer as die ander. Dit kan skeef na links of skeef na regs wees.

Image not finished

Figuur 10.7

10.3.1.2 Verhouding tussen gemiddelde, mediaan en modus

Die verhouding van die gemiddelde, mediaan en modus ten opsigte van mekaar kan inligting verskaf oor die relatiewe vorm van die data verspreiding. As die gemiddelde, mediaan en modus min of meer dieselfde is, kan die verspreiding aangeneem word as simmetries. Met die gemiddelde en mediaan bekend, kan die volgende afgelei word:

- (gemiddelde - mediaan) ≈ 0 dan is die data simmetries
- (gemiddelde - mediaan) > 0 dan is die data positief skeef (Skeef na regs). Dit beteken dat die mediaan naby is aan die begin van die data stel.
- (gemiddelde - mediaan) < 0 dan is die data negatief skeef (skeef na links). Dit beteken dat die mediaan naby is aan die einde van die data stel.

10.3.1.2.1 Verspreiding van data

1. Drie stelle van 12 leerlinge elk het 'n toets geskryf en se punte is aangeteken. Die toets het uit 50 getel. Gebruik die gegewe data om die volgende vrae te beantwoord.

Stel 1	Stel 2	Stel 3
25	32	43
47	34	47
15	35	16
17	32	43
16	25	38
26	16	44
24	38	42
27	47	50
22	43	50
24	29	44
12	18	43
31	25	42

Table 10.4: Kumulatiewe frekwensies vir data stel 2.

a. Vir elke stel, bereken die gemiddelde en die vyf-getal opsomming.
b. Vir elke klas, bereken die verskil tussen die gemiddelde en die mediaan. Skets 'n houer- en puntdiagram op dieselfde stel asse
c. Sê watter van die drie stelle skeef is (of regs of links)
d. Is stel A skeef of simmetries?
e. Is stel C simmetries? Hoekom of hoekom nie?

2. Twee stelle data het dieselfde omvang, maar een is skeef na regs en die ander een is skeef na links. Skets die houer- en puntdiagram en dan vind data (6 punte in elke stel) wat die vereistes voldoen.

10.3.2 Verspreidingsgrafieke

'n Verspreidingsgrafiek wys die verhouding tussen twee veranderlikes. Ons sê hierdie is tweeveranderlike data en ons plot die data van twee verskillende stelle deur middel van georde pare. Byvoorbeeld, ons kan massa op die horisontale as (eerste veranderlike) en hoogte op die tweede as (tweede veranderlike), of ons kan stroom op die horisontale as en spanning op die vertikale as hê.

Ohm se wet is 'n belangrike verhouding in fisika. Dit beskryf die verhouding tussen stroom en spanning in 'n geleier, soos 'n stuk draad. Wanneer ons die spanning meet (afhanklike veranderlike) wat verkry is deur 'n sekere stroom (onafhanklike veranderlike) in 'n draad, kry ons die data punte soos volg Tabel 10.5.

Stroom	**Spanning**	**Stroom**	**Spanning**
0	0,4	2,4	1,4
0,2	0,3	2,6	1,6
0,4	0,6	2,8	1,9
0,6	0,6	3	1,9
0,8	0,4	3,2	2
1	1	3,4	1,9
1,2	0,9	3,6	2,1
1,4	0,7	3,8	2,1
1,6	1	4	2,4
1,8	1,1	4,2	2,4
2	1,3	4,4	2,5
2,2	1,1	4,6	2,5

Table 10.5: Stroom en spanning waardes gemeet in 'n stuk draad.

As ons hierdie data plot, kry ons die volgende verspreidingsgrafiek Figuur 10.8.

Image not finished

Figuur 10.8

As ons 'n funksie moet kies wat die data op die beste beskryf, sal 'n reguit lyn die beste opsie wees.

10.3.2.1 Ohm se wet

Ohm se wet beskryf die verhouding tussen stroom en spanning in 'n geleier. Die gradiënt van die grafiek van spanning teenoor stroom is bekend as die *weerstand* van die geleier.

10.3.2.2 Navorsingsprojek : Spreidiagram

Die funksie wat 'n stel data beste beskryf kan in enige vorm wees. Ons sal onsself aan die vorms wat reeds bestudeer is beperk, dit is, lineêre-, kwadratiese- of eksponensiële funksies. Plot die volgende stel data as 'n verspreidingsgrafiek, en besluit op 'n funksie wat die data beste beskryf. Die funksie kan of kwadraties of eksponensieel wees.

1.

x	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**
-5	9,8	0	14,2	-2,5	11,9	2,5	49,3
-4,5	4,4	0,5	22,5	-2	6,9	3	68,9
-4	7,6	1	21,5	-1,5	8,2	3,5	88,4
-3,5	7,9	1,5	27,5	-1	7,8	4	117,2
-3	7,5	2	41,9	-0,5	14,4	4,5	151,4

Table 10.6

2.

x	y	x	y	x	y	x	y
-5	75	0	5	-2,5	27,5	2,5	7,5
-4,5	63,5	0,5	3,5	-2	21	3	11
-4	53	1	3	-1,5	15,5	3,5	15,5
-3,5	43,5	1,5	3,5	-1	11	4	21
-3	35	2	5	-0,5	7,5	4,5	27,5

Table 10.7

3.

Hoogte (cm)	147	150	152	155	157	160	163	165
	168	170	173	175	178	180	183	
Gewig (kg)	52	53	54	56	57	59	60	61
	63	64	66	68	70	72	74	

Table 10.8

Definisie 10.2: uitskieter
'n Punt op 'n verspreidingsgrafiek wat wyd geskei is van die ander punte staan bekend as 'n uitskieter.

Die volgende simulasie laat jou toe om verskillende verspreidingsgrafiek-punte te plot sowel as 'n kromme op die plot. Ignoreer die fout bars (blou lyne) op die punte.

Phet simulasie vir verspreidingsgrafieke

This media object is a Flash object. Please view or download it at <curve-fitting.swf>

Figuur 10.9

10.3.2.3 Scatter Plots

1. 'n Klas se punte vir 'n toets was aangeteken saam met die hoeveelheid leertyd gespandeer daarvoor. Die resultate is gegee hieronder.

Punt (persentasie)	Tyd spandeer op leer (minute)
67	100
55	85
70	150
90	180
45	70
75	160
50	80
60	90
84	110
30	60
66	96
96	200

Table 10.9

a. Teken 'n diagram met beskryfte vir elke as
b. Sê met rede, die doel of onafhanklike veranderlike en die effek of afhanklike veranderlike.
c. Plot die data pare
d. Wat kom jy agter oor die diagram?
e. Is daar enige patroon wat volg?

2. Die posisies van agt tennisspelers is gegee saam met die tyd wat hulle spandeer het op oefening.

Oefentyd (min)	Posisie
154	5
390	1
130	6
70	8
240	3
280	2
175	4
103	7

Table 10.10

a. Skets 'n verspreidingsgrafiek en verduidelik hoe jy die afhanklike veranderlike (doel) en onafhanklike afhanklike (effek) gekies het.
b. Watter patroon neem jy waar?

3. Agt kinders se lekkergoed verbruik en slaapgewoontes was aangeteken. Die data is gegee op die volgende tabel.

getal lekkers (per week)	gemiddelde slaaptyd (per dag)
15	4
12	4,5
5	8
3	8,5
18	3
23	2
11	5
4	8

Table 10.11

a. Wat is die afhanklike veranderlike?
b. Wat is die onafhanklike veranderlike?
c. Skets 'n verspreidingsgrafiek vir die data.
d. Watter patroon neem jy waar?

10.4 Misbruik van statistieke[4]

10.4.1 Misbruik van Statistiek

Data kan op baie maniere gemanipuleer word wat misleidend kan wees. Grafieke moet versigtig ontleed word en vrae moet gevra word oor 'die storie agter die getalle'. Potensiële misinterpretasies is:

1. Verander die skaal om die voorkoms van die grafiek te verander
2. Weglating en seleksie van data
3. Fokus op spesifieke navorsingsvrae
4. Seleksie van groepe

10.4.1.1 Ondersoek : Misbruik van Statistiek

1. Ondersoek die volgende grafieke en lewer kommentaar oor die verandering van die skaal.

Image not finished

Figure 10.10

[4]This content is available online at <http://siyavula.cnx.org/content/m39156/1.1/>.

Image not finished

Figure 10.11

2. Bestudeer die volgende drie grafieke en lewer kommentaar oor weglating, seleksie en bevoordeling. Wenk: Wat is verkeerd met die data en wat is weggelaat van die staaf- en sirkelgrafiek?

Aktiwiteit	Ure
Slaap	8
Sport	2
Skool	7
Kuier by vriende	1
Kyk TV	2
Studeer	3

Table 10.12

Image not finished

Figure 10.12

Image not finished

Figure 10.13

10.4.1.2 Misbruik van Statistiek

Die staafgrafiek hieronder toon die resultate van 'n studie wat kyk na 'n vergelyking van kospryse teenoor die inkomste van 'n huishouding in 1994.

Image not finished

Figure 10.14

Income (thousands of rands)	Food bill (thousands of rands)
< 5	2
5-10	2
10-15	4
15-20	4
20-30	8
30-40	6
40-50	10
> 50	12

Table 10.13

1. Wat is die afhanklike veranderlike? Hoekom?
2. Watter afleiding kan jy maak in verband met hierdie veranderlike? Maak dit sin?
3. Wat sal gebeur as die grafiek verander word van kosrekening in duisend rande na persentasie van inkomste?
4. Teken hierdie staafgrafiek deur van 'n tabel gebruik te maak. Watter afleidings kan gemaak word?
5. Hoekom verskil die twee grafieke alhoewel dieselfde inligting gebruik word?
6. Wat let jy nog op? Beïnvloed dit die regverdigheid van die resultate?

10.4.2 Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Baie padongelukke gebeur gedurende vakansies tussen Durban en Johannesburg. 'n Studie is gedoen om te sien of spoed 'n faktor is in die hoë ongeluksyfer. Gebruik die resultate om die volgende vrae te beantwoord.

Speed (km/h)	Frequency
$60 < x \leq 70$	3
$70 < x \leq 80$	2
$80 < x \leq 90$	6
$90 < x \leq 100$	40
$100 < x \leq 110$	50
$110 < x \leq 120$	30
$120 < x \leq 130$	15
$130 < x \leq 140$	12
$140 < x \leq 150$	3
$150 < x \leq 160$	2

Table 10.14

a. Teken 'n grafiek om hierdie inligting voor te stel.
b. Gebruik jou grafiek om die mediaanspoed en die interkwartielwydte te bereken.

c. Watter persentasie van motors ry teen meer as120 $km.h^{-1}$ op hierdie pad?
d. Oorskry motors oor die algemeen die spoedgrens?

2. Die volgende twee diagramme (wat twee skole se bydrae vir liefdadigheid toon) is oordryf. Verduidelik hoekom hul misleidend is en teken hulle oor sodat hul nie misleidend is nie.

Image not finished

Figure 10.15

3. Die maandelikse inkomste van ag onderwysers word as volg gegee: R10 050; R14 300; R9 800; R15 000; R12 140; R13 800; R11 990; R12 900.

   a. Wat is die gemiddelde inkomste en die standaardafwyking?
   b. Hoeveel van die salarisse is binne die standaardafwyking van die gemiddeld?
   c. As elke onderwyser 'n bonus van R500 by hul salaris kry, wat is die nuwe gemiddeld en standaardafwyking?
   d. As elke onderwyser 'n bonus van 10% van hul salaris bykry, wat is die nuwe gemiddeld en standaardafwyking?
   e. Vir albei bogenoemde vrae, hoeveel salarisse is binne een standaardafwyking van die gemiddeld?
   f. Gebruik bostaande inligting om te bereken watter bonus die voordeligste vir die onderwysers is.

Solutions to Exercises in Chapter 10

Solution to Exercise 10.1.1 (p. 125)

Step 1. Wanneer die regverdige dobbelsteen gerol word, bestaan die daar 6 moontlike uitkomstes. Die datastel is daarom $x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. en n=6.
Step 2. Die populasie gemiddeld word bereken deur:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) \\ &= 3,5 \end{aligned} \quad (10.8)$$

Step 3. Die populasie variansie word bereken deur:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n} \\ &= \frac{1}{6}(6,25+2,25+0,25+0,25+2,25+6,25) \\ &= 2,917 \end{aligned} \quad (10.9)$$

Step 4.

$\overline{X}$	$(X-\overline{X})$	$(X-\overline{X})^2$
1	-2.5	6.25
2	-1.5	2.25
3	-0.5	0.25
4	0.5	0.25
5	1.5	2.25
6	2.5	6.25
$\sum X = 21$	$\sum x = 0$	$\sum (X-\overline{X})^2 = 17.5$

Table 10.15

Step 5. Die (populasie) standaard afwyking word bereken deur:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{2,917} \\ &= 1,708. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Let op hoe hierdie standaard afwyking êrens tussen die moontlike afwykings lê.

Solution to Exercise 10.2.1 (p. 126)

Step 1. Minimum = 1,25
Maksimum = 5,10
Posisie van eerste kwartiel = tuessen 3 en 4
Posisie van tweede kwartiel = tussen 6 en 7
Posisie van derde kwartiel = tussen 9 en 10
Data punt tussen 3 en 4 = $\frac{1}{2}(2,5+2,5) = 2,5$
Data punt tussen between 6 en 7 = $\frac{1}{2}(3,2+4,1) = 3,65$
Data punt tussen between 9 en 10 = $\frac{1}{2}(4,75+4,8) = 4,775$
Die vyf-getal opsomming is dus: 1,25; 2,5; 3,65; 4,775; 5,10.

Step 2. **Image not finished**

Figure 10.16

Glossary

U **uitskieter**

'n Punt op 'n verspreidingsgrafiek wat wyd geskei is van die ander punte staan bekend as 'n uitskieter.

V **Vorm van 'n data stel**

Hierdie beskryf hoe die data versprei is relatief tot die gemiddelde en die mediaan.

K **Kwadratiese ry**

'n Kwadratiese ry is 'n ry waar die tweede verskille tussen opeenvolgende terme met dieselfde hoeveelheid verskil. Dit word 'n gemene tweede verskil genoem.

Index of Keywords and Terms

Keywords are listed by the section with that keyword (page numbers are in parentheses). Keywords do not necessarily appear in the text of the page. They are merely associated with that section. *Ex.* apples, § 1.1 (1) **Terms** are referenced by the page they appear on. *Ex.* apples, 1

Attributions

Collection: *Siyavula textbooks: Wiskunde (Graad 11)*
Edited by: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/col11339/1.4/
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: "Exponente - Graad 11"
Used here as: "Exponente"
By: Mr S.N.Carollisson, Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38256/1.1/
Pages: 1-3
Copyright: Mr S.N.Carollisson, Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Exponents - Grade 11
By: Rory Adams, Free High School Science Texts Project, Sarah Blyth, Heather Williams
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m32625/1.2/

Module: "Wortelvorme - Graad 11"
Used here as: "Wortelvorme"
By: Wiehan Agenbag, Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38237/1.2/
Pages: 5-8
Copyright: Wiehan Agenbag, Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Surds - Grade 11
By: Rory Adams, Free High School Science Texts Project, Heather Williams
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m30837/1.2/

Module: "Foutgrense - Graad 11"
Used here as: "Foutgrense"
By: Liezel du Toit, Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38241/1.2/
Pages: 9-10
Copyright: Liezel du Toit, Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Error Margins - Grade 11
By: Rory Adams, Free High School Science Texts Project, Sarah Blyth, Heather Williams
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m32630/1.2/

Module: "Kwadratiese rye - Graad 11"
Used here as: "Kwadratiese rye"
By: Wiehan Agenbag, Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38240/1.2/
Pages: 11-15
Copyright: Wiehan Agenbag, Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Quadratic Sequences - Grade 11
By: Rory Adams, Free High School Science Texts Project, Sarah Blyth, Heather Williams
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m32633/1.2/

Module: "Finansiële wiskunde: enkelvoudige depresiasie (Graad 11)"
Used here as: "Enkelvoudige depresiasie"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39189/1.1/
Pages: 17-19
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Finance: simple depreciation (Grade 11)
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38825/1.1/

Module: "Finansiële wiskunde: saamgestelde depresiasie (Graad 11)"
Used here as: "Saamgestelde depresiasie"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39130/1.1/
Pages: 19-21
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Finance: compound depreciation (Grade 11)
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38827/1.1/

Module: "Finansiële wiskunde: huidige en toekomstige waardes (Graad 11)"
Used here as: "Huidige en toekomstige waardes"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39109/1.1/
Pages: 21-22
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Finance: present and future values (Grade 11)
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38828/1.1/

Module: "Finansiële wiskunde: Vind i en n"
Used here as: "Vind i en n"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39234/1.1/
Pages: 23-24
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Finance: Finding i and n
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38829/1.1/

Module: "Finansiële wiskunde: Nominale en effektiewe rentekoerse (Graad 11)"
Used here as: "Nominale en effektiewe rentekoerse"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39145/1.1/
Pages: 24-28

Based on: Finance: nominal and effective interest rates (Grade 11)
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38830/1.1/

Module: "Oplos van kwadratiese vergelykings: Faktorisering"
Used here as: "Faktorisering"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39135/1.1/
Pages: 33-34

Based on: Solving quadratic equations: Factorisation
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38837/1.1/

Module: "Oplos van kwadratiese vergelykings: Kwadraatsvoltooiing (Graad 11)"
Used here as: "Kwadraatsvoltooiing"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39137/1.1/
Pages: 34-36

Based on: Solving quadratic equations: completing the square
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38838/1.1/

Module: "Oplos van kwadratiese vergelykings: die kwadratiese formule"
Used here as: "Die kwadratiese formule"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39139/1.1/
Pages: 36-38

Based on: Solving quadratic equations: the quadratic formula
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38851/1.1/

Module: "Oplos van kwadratiese vergelykings: die vind van die vergelyking"
Used here as: "Die vind van die vergelyking"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39143/1.1/
Pages: 39-43
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Solving quadratic equations: finding the equation
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38843/1.1/

Module: "Oplossing van Kwadratiese Ongelykhede - Graad 11"
Used here as: "Oplossing van Kwadratiese Ongelykhede"
By: Carl Scheffler, Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38123/1.1/
Pages: 49-54
Copyright: Carl Scheffler, Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Solving Quadratic Inequalities - Grade 11
By: Rory Adams, Free High School Science Texts Project, Heather Williams
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m30838/1.2/

Module: "Gelyktydige vergelykings: algebraïese oplossing"
Used here as: "Algebraïese oplossing"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39151/1.1/
Pages: 55-56
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Simultaneous equations: algebraic solution
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38856/1.1/

Module: "Gelyktydige vergelykings: grafiese oplossing"
Used here as: "Grafiese oplossing"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39149/1.1/
Pages: 56-58
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Simultaneous equations: graphical solution
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38854/1.1/

Module: "Hiperboliese funksies en grafieke"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39220/1.1/
Pages: 61-66
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Hyperbolic Functions and Graphs
By: Rory Adams, Free High School Science Texts Project, Heather Williams
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m30845/1.3/

Module: "Eksponensiële funksies en grafieke - Graad 11"
Used here as: "Eksponensiële funksies en grafieke"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39264/1.1/
Pages: 67-72
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Exponential Functions and Graphs - Grade 11
By: Rory Adams, Free High School Science Texts Project, Heather Williams
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m30856/1.3/

Module: "Gradiënt by 'n punt"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39222/1.1/
Pages: 73-77
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Gradient at a Point
By: Rory Adams, Free High School Science Texts Project, Sarah Blyth, Heather Williams
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m32651/1.3/

Module: "Meetkunde: veelhoeke (Grade 11)"
Used here as: "Veelhoeke"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39122/1.1/
Pages: 79-82
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Geometry: Polygons (Grade 11)
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38832/1.1/

Module: "Meetkunde: Driehoeke meetkunde (Graad 11)"
Used here as: "Driehoeke meetkunde"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39210/1.1/
Pages: 82-88
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Geometry: Triangle geometry (Grade 11)
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38833/1.1/

Module: "Meetkunde: koördinaatmeetkunde (Graad 11)"
Used here as: "Koördinaatmeetkunde"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39127/1.1/
Pages: 88-92
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Geometry: Co-ordinate geometry (Grade 11)
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38835/1.1/

Module: "Meetkunde: transformasies (Graad 11)"
Used here as: "Transformasies"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39124/1.1/
Pages: 92-97
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Geometry: Transformations (Grade 11)
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38836/1.1/

Module: "Trigonometrie: grafieke van trigonometriese funksies (Grade 11)"
Used here as: "Grafieke van trigonometriese funksies"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39209/1.1/
Pages: 101-109
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Trigonometry: Graphs of trig functions (Grade 11)
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38866/1.1/

Module: "Trigonometrie: Trig identiteite (Graad 11)"
Used here as: "Trig identiteite"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39188/1.1/
Pages: 109-113
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Trigonometry: Trig identities (Grade 11)
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38868/1.1/

Module: "Trigonometrie: reduksieformule (Grade 11)"
Used here as: "Reduksieformule"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39211/1.1/
Pages: 113-118
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Trigonometry: Reduction formulae (Grade 11)
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38870/1.1/

Module: "Statistiek: Standaardafwyking en variansie"
Used here as: "Standaardafwyking en variansie"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39153/1.1/
Pages: 121-126
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Statistics: Standard deviation and variance
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38858/1.1/

Module: "Statistiek: grafiese voorstelling van data"
Used here as: "Grafiese voorstelling van data"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39268/1.1/
Pages: 126-128
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Statistics: graphical representation of data
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38860/1.1/

Module: "Statistiek: die verspreiding van die data"
Used here as: "Die verspreiding van die data"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39197/1.1/
Pages: 128-134
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Statistics: distribution of data
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38861/1.1/

Module: "Statistiek: misbruik van statistieke"
Used here as: "Misbruik van statistieke"
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m39156/1.1/
Pages: 134-137
Copyright: Free High School Science Texts Project
License: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/
Based on: Statistics: misuse of statistics
By: Free High School Science Texts Project
URL: http://siyavula.cnx.org/content/m38864/1.1/

Siyavula textbooks: Wiskunde (Graad 11)
The grade 11 maths collection for Afrikaans

About Connexions
Since 1999, Connexions has been pioneering a global system where anyone can create course materials and make them fully accessible and easily reusable free of charge. We are a Web-based authoring, teaching and learning environment open to anyone interested in education, including students, teachers, professors and lifelong learners. We connect ideas and facilitate educational communities.

Connexions's modular, interactive courses are in use worldwide by universities, community colleges, K-12 schools, distance learners, and lifelong learners. Connexions materials are in many languages, including English, Spanish, Chinese, Japanese, Italian, Vietnamese, French, Portuguese, and Thai. Connexions is part of an exciting new information distribution system that allows for **Print on Demand Books**. Connexions has partnered with innovative on-demand publisher QOOP to accelerate the delivery of printed course materials and textbooks into classrooms worldwide at lower prices than traditional academic publishers.